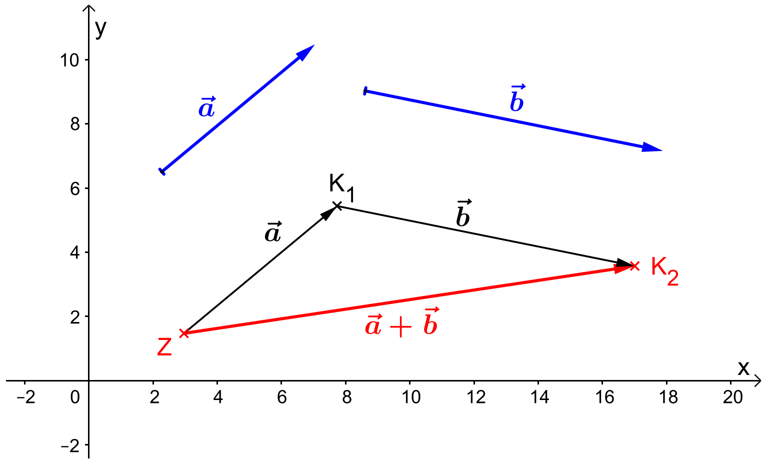
Súčet vektorov

Chceme sčítať vektory. Uvažujme namiesto vektorov posúvaním. Posúvanie (tak, ako všetky zobrazenia) môžeme sčítať. Súčet znamená kombináciu zobrazení – najprv urobíme obraz podľa prvého zobrazenia, a potom obraz obrazu podľa druhého zobrazenia. Čiže výsledkom je zobrazenie, ktoré prenesie pôvodný vzor do druhého obrazu. Podobne je to aj s vektormi.
Ak sčítame dva vektory dostaneme vektor (sčítavaním rovnakých matematických objektov – *ak sa dajú sčítať* – vznikne objekt rovnakého typu: súčet čísel je číslo; súčet zobrazení je zobrazenie; súčet funkcií je funkcia).

Súčet vektorov môžeme definovať dvojakým spôsobom. Samozrejme obidvomi spôsobmi dostaneme ten istý výsledok, ten istý vektor.
Súčet určíme pomocou orientovaných úsečiek (umiestnením vektora do bodu), ale budeme hovoriť o súčte vektorov a nie orientovaných úsečiek.

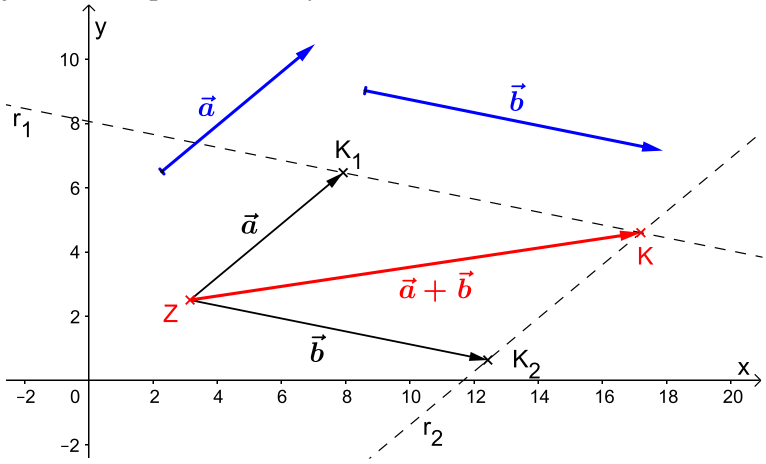
- prvý spôsob

  umiestnime prvý (jedno ktorý z dvoch) vektor do ľubovoľného bodu (Z) roviny v ktorej pracujeme
  druhý vektor umiestnime do koncového bodu prvého (K_1)
  orientovaná úsečka so začiatočným bodom Z a koncovým bodom K_2 je jedno umiestnenie hľadaného súčtu ako vektora



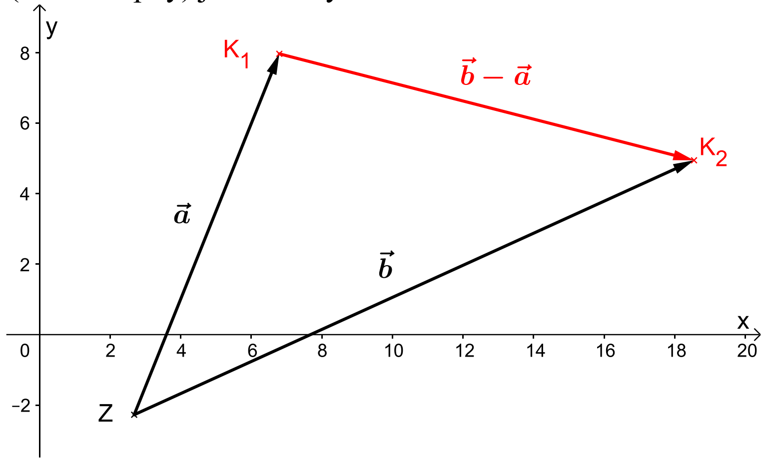
- druhý spôsob

  umiestnime obidva vektory do ľubovoľného bodu (Z) roviny v ktorej pracujeme
  rovnobežne s druhou orientovanou úsečkou v koncových bodoch orientovaných úsečiek (K_1 a K_2) doplníme obrázok na rovnobežník (priamkami r_1 a r_2)
  ich priesečník označme (K)
  hľadaný súčet je vektor reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{ZK}$



D$_1$. *Súčet vektorov* je vektor, ktorý dostanem ak druhý vektor umiestnim do koncového bodu prvého vektora, potom orientovaná úsečka so začiatočným bodom prvého a koncovým bodom druhého vektora určí ich súčet.
D$_2$. *Súčet vektorov* je vektor, ktorý dostanem ak obidva vektory umiestnim do spoločného začiatočného bodu, doplním na rovnobežník (pôvodné dva vektory určia dve susedné strany rovnobežníka), a súčtom je tá uhlopriečka rovnobežníka, ktorá vychádza zo spoločného začiatočného bodu orientovaných úsečiek, a koncovým bodom bude druhý krajný bod tejto uhlopriečky.

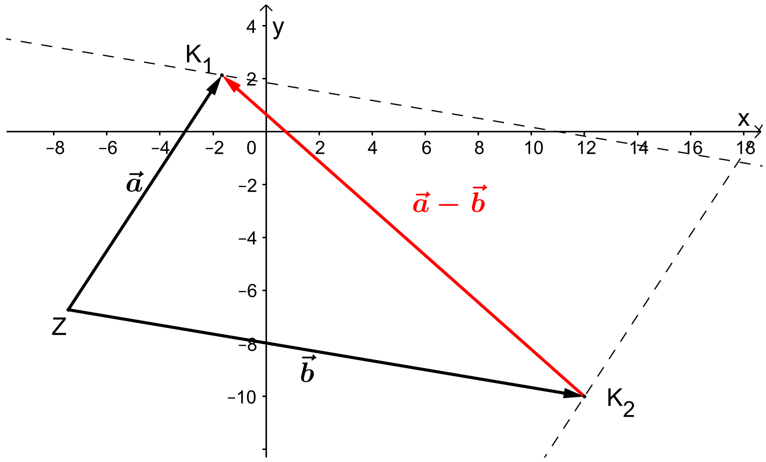
P. ***Rozdiel vektorov*** nezvykneme zvlášť definovať, ale z prvej definície vyplýva, že rozdielom je vektor, ktorý spája dva koncové body orientovaných úsečiek reprezentujúce vektory umiestnené do spoločného začiatočného bodu, a koncovým bodom (miesto šípky) je koncový bod menšenca.



P. Ak vymeníme menšenec a menšiteľ (vieme z teórie čísel, že rozdiel nie je komutatívny → tam výsledkom je opačné číslo), dostaneme vektor, ktorý má tú istú veľkosť, je rovnobežný (dokonca totožný – reprezentáciou je opačná orientovaná úsečka), ale smer má opačný.
D. ***Opačný vektor*** k danému vektoru je taký vektor, ktorý má rovnakú veľkosť a opačný smer (orientované úsečky patriace do množiny vektora a opačného vektora).
V. Opačný vektor má opačné súradnice.

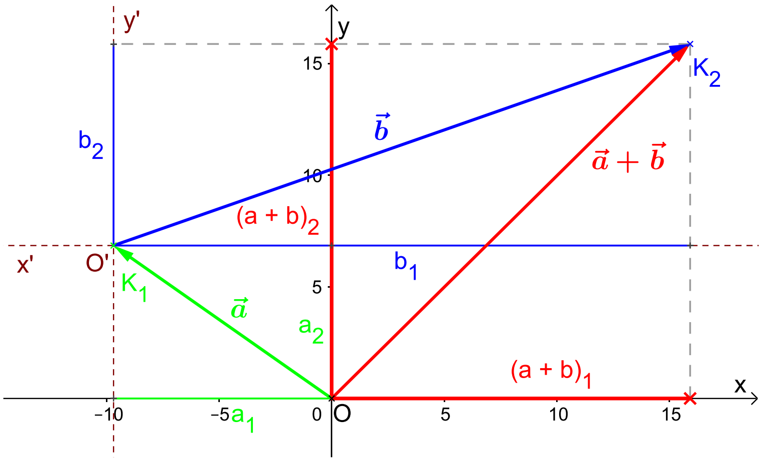
$\vec{a} = (a_1; a_2)$ $\overrightarrow{o_a} = (-a_1; -a_2)$

Z druhej definície zase vyplýva, že rozdielom vektorov je tá druhá uhlopriečka rovnobežníka, a koncový bod je znovu koncový bod menšenca.



V analytickej geometrii nás ale zaujíma samotný výpočet súradníc súčtového vektora zo súradníc sčítancov a nie definícia súčtu. Preto podľa prvej definície súčtu vektorov začiatočným bodom umiestnenia prvého vektora si zvolíme začiatok súradnicovej sústavy (čiže základné umiestnenie prvého vektora – do bodu O). V koncovom bode (K_1) nakreslíme pomocnú, posunutú súradnicovú sústavu $O'x'y'$. Druhý vektor potom má takisto základné umiestnenie ale v posunutej sústave súradníc. Na súradnicových osiach (x; y; x'; y') sú vyznačené súradnice vektorov (a_1; a_2; b_1; b_2). Na obrázku vidíme, že súradnice koncového bodu (K_2) súčtového vektora ($\vec{a} + \vec{b}$) v základnom umiestnení je súčet jenotlivých súradníc.

$(a + b)_1$ dostaneme, ak od b_1 odčítame a_1 – lenže a_1 je záporná hodnota, čiže treba ich sčítať
$(a + b)_2$ dostaneme, ak a_2 a b_2 sčítame



V. Ak sú dané vektory, súradnice súčtu týchto vektorov dostanem, ak sčítam jednotlivé súradnice. Ak odčítame vektory, odčítame jednotlivé súradnice menšiteľa od menšenca.

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$

P. V priestore: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$

príklad:

Určte súčet a rozdiel vektorov:

a, $\vec{a} = (4; 7)$; $\vec{b} = (-2; 5)$ b, $\vec{c} = (-1; -6)$; $\vec{d} = (-5; 3)$ c, $\vec{e} = (2; -9)$; $\vec{f} = (-8; 5)$

$\vec{a} + \vec{b} = (4; 7) + (-2; 5) = (4 + (-2); 7 + 5) = (2; 12)$

$\vec{a} - \vec{b} = (4; 7) - (-2; 5) = (4 - (-2); 7 - 5) = (6; 2)$

$\vec{b} - \vec{a} = (-2; 5) - (4; 7) = (-2 - 4; 5 - 7) = (-6; -2)$

$\vec{c} + \vec{d} = (-1; -6) + (-5; 3) = (-1 + (-5); -6 + 3) = (-6; -3)$

$\vec{c} - \vec{d} = (-1; -6) - (-5; 3) = (-1 - (-5); -6 - 3) = (4; -9)$

$\vec{d} - \vec{c} = (-5; 3) - (-1; -6) = (-5 - (-1); 3 - (-6)) = (-4; 9)$

$\vec{e} + \vec{f} = (2; -9) + (-8; 5) = (2 + (-8); -9 + 5) = (-6; -4)$

$\vec{e} - \vec{f} = (2; -9) - (-8; 5) = (2 - (-8); -9 - 5) = (10; -14)$

$\vec{f} - \vec{e} = (-8; 5) - (2; -9) = (-8 - 2; 5 - (-9)) = (-10; 14)$