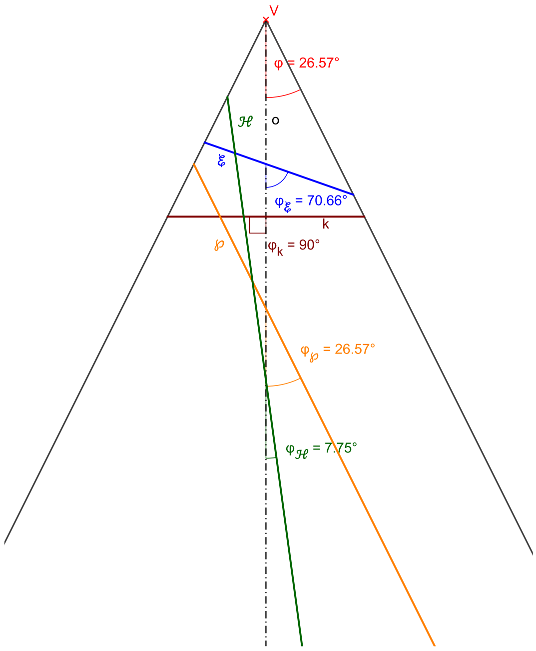
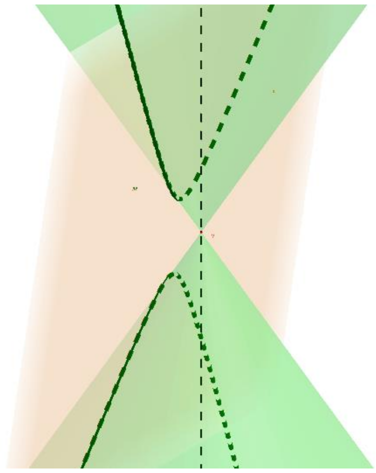
Hyperbola

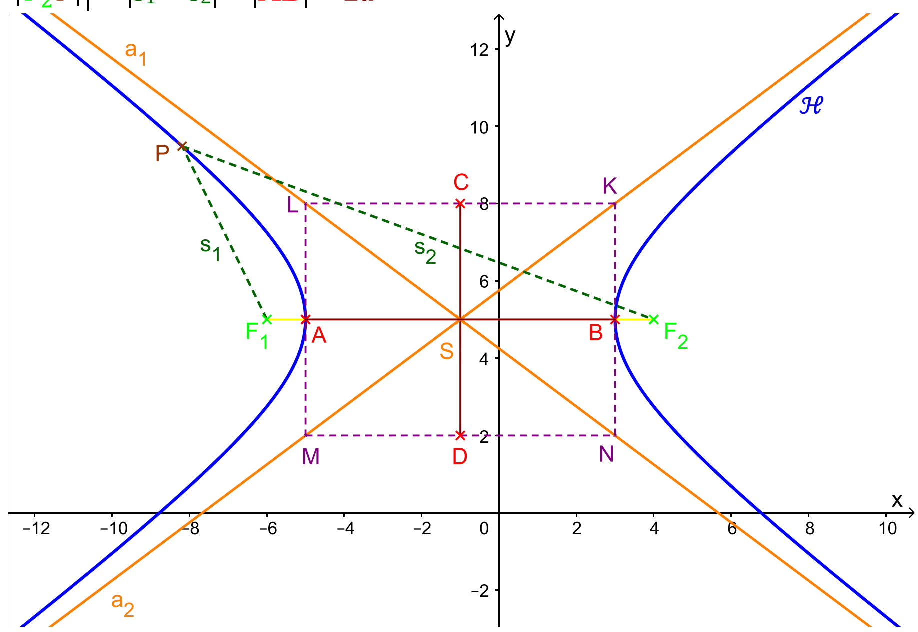
analytická geometria: kvadratický útvar, krivka druhého stupňa
euklidovská geometria: kužeľosečka (prienik kužeľovej plochy s rovinu) – rovina je rovnobežná s dvoma stranami kužeľa



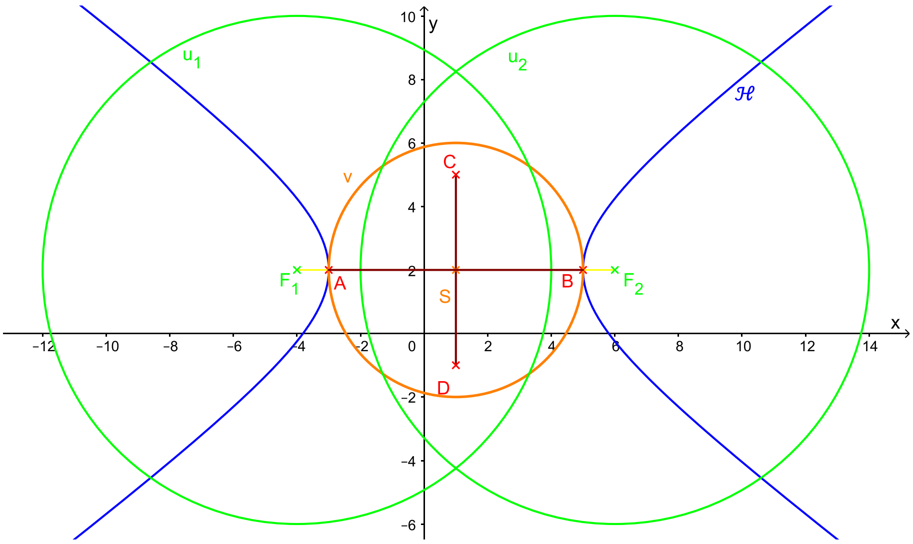


D. ***Hyperbola*** je množina bodov v rovine, ktorých rozdiel vzdialeností od dvoch vopred daných bodov je konštantný. Tie dané body sú ohniská a konštantný rozdiel je dĺžka hlavnej osi.

$$\big||F_1P| - |F_2P|\big| = |s_1 - s_2| = |AB| = 2a$$



S – stred $\mathcal{H}$
A, B – hlavné vrcholy $\mathcal{H}$: A, B $\in \mathcal{H}$
C, D – vedľajšie vrcholy $\mathcal{H}$: C, D $\notin \mathcal{H}$
F_1, F_2 – ohniská $\mathcal{H}$
$|AB| = 2a$ – dĺžka hlavnej osi (a – dĺžka hlavnej polosi)
$|CD| = 2b$ – dĺžka vedľajšej osi (b – dĺžka vedľajšej polosi)
$|F_1S| = |SF_2| = e$ – lineárna excentricita (ohnisková vzdialenosť, výstrednosť)
s_1; s_2 – sprievodiče bodu P
charakteristický obdĺžnik – A, B, C, D sú stredmi strán charakteristického obdĺžnika
a_1, a_2 – asymptoty (dotyčnica v nekonečne) – uhlopriečky charakteristického obdĺžnika
vnútro (vnútorné body) $\mathcal{H}$ – časti roviny, kde sú ohniská (naľavo od ľavej a napravo od pravej vetvy)



v – vrcholová kružnica: v(S, r = a)

u – určujúca kružnica: $u_1(F_1$, r = 2a); $u_2(F_2$, r = 2a)

V. $e^2 = a^2 + b^2$

$\mathscr{H}$: S(u; v); a; b – stredová rovnica hyperboly:

$\mathscr{H}: \frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ AB ∥ x (s vetvami naľavo a napravo)

$\mathscr{H}: \frac{(y-v)^2}{a^2} - \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1$ AB ∥ y (s vetvami nad a pod)

odstránime zátvorky, prenesieme všetko na jednu stranu, usporiadame → všeobecná rovnica hyperboly:

$\mathscr{H}: A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$ $A; B; C; D; E \in \mathbb{R}$

podmienka: $A.B < 0$ (A a B majú opačné znamienka) ∧

∧ $BC^2 + AD^2 - 4ABE \neq 0$

parametrická rovnica hyperboly:

$\mathscr{H}: x = \frac{a}{\cos\varphi}; \quad y = b.\mathrm{tg}\,\varphi$ $\varphi \in \langle 0; 2\pi) \wedge \varphi \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

súradnice bodov:

AB ∥ x:

A($u - a$; v)	C(u ; $v + b$)	$F_1(u - e; v)$
B($u + a$; v)	D(u ; $v - b$)	$F_2(u + e; v)$

AB ∥ y:

A(u; $v - a$)	C($u - b$; v)	$F_1(u; v - e)$
B(u; $v + a$)	D($u + b$; v)	$F_2(u; v + e)$

rovnice asymptot:

AB ∥ x: smernice – $k_{a_1,a_2} = \mp\frac{b}{a}$

$a_1: b.(x - u) + a.(y - v) = 0$ $a_2: b.(x - u) - a.(y - v) = 0$

$a_1: y = -\frac{b}{a}(x - u) + v$ $a_2: y = \frac{b}{a}(x - u) + v$

AB ∥ y: smernice – $k_{a_1,a_2} = \pm\frac{a}{b}$

$a_1: a.(x - u) - b.(y - v) = 0$ $a_2: a.(x - u) + b.(y - v) = 0$

$a_1: y = \frac{a}{b}(x - u) + v$ $a_2: y = -\frac{a}{b}(x - u) + v$

príklad:

Napíšte všeobecnú rovnicu hyperboly, ktorej hlavná os je rovnobežná s osou x a poznáme: a = 6, b = 8, S(-3; 2)

dosadíme do stredovej rovnice údaje

$$\mathscr{H}: \frac{\left(x-(-3)\right)^2}{6^2} - \frac{(y-2)^2}{8^2} = 1$$

umocníme zátvorky

$$\frac{x^2+6x+9}{36} - \frac{y^2-4y+4}{64} = 1 \qquad /.576$$

odstránime zlomky

$16(x^2 + 6x + 9) – 9(y^2 – 4y + 4) = 576$

odstránime zátvorky

$16x^2 + 96x + 144 – 9y^2 + 36y – 36 = 576$ /-576

anulujeme rovnicu a preusporiadame

$\mathcal{H}$: $16x^2 – 9y^2 + 96x + 36y – 468 = 0$

Napíšte všeobecnú rovnicu hyperboly, ktorej hlavná os je rovnobežná s osou *y* a: b = 15, e = 17, S(-1; -4)

najprv vypočítame hlavnú polos

$e^2 = a^2 + b^2 \rightarrow a = \sqrt{e^2 - b^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$

dosadíme do stredovej rovnice údaje

$$\mathcal{H}: \frac{(y-(-4))^2}{8^2} - \frac{(x-(-1))^2}{15^2} = 1$$

umocníme zátvorky

$$\frac{y^2+8y+16}{64} - \frac{x^2+2x+1}{225} = 1 \qquad /.14\,400$$

odstránime zlomky

$225(y^2 + 8y + 16) – 64(x^2 + 2x + 1) = 14\,400$

odstránime zátvorky

$225y^2 + 1\,800y + 3\,600 – 64x^2 – 128y – 64 = 14\,400$ /-14 400

anulujeme rovnicu a preusporiadame

$\mathcal{H}$: $225y^2 – 64x^2 + 1\,800y – 128x – 10\,864 = 0$

Zistite súradnice stredu S; vrcholov A, B, C, D a ohnísk F_1, F_2 hyperboly, veľkosť polosí a, b, lineárnu excentricitu e hyperboly a napíšte rovnice asymptot: $\mathcal{H}$: $25x^2 – 144y^2 – 200x – 1\,440y + 400 = 0$

$25x^2 – 144y^2 – 200x – 1\,440y + 400 = 0$

preusporiadame

$25x^2 – 200x – 144y^2 – 1\,440y = -400$

vyjmeme vo dvojiciach koeficienty (a iba koeficienty) kvadratických členov

pozor na znamienko!

$25(x^2 – 8x) – 144(y^2 + 10y) = -400$

doplníme na úplný štvorec (na druhú mocninu dvojčlena)

$25(x^2 – 8x + 4^2) – 144(y^2 + 10y + 5^2) = -400 + 25.4^2 – 144.5^2$

$25(x – 4)^2 – 144(y + 5)^2 = -400 + 400 – 3\,600$

vydelíme rovnicu s číslom z pravej strany – aby tam ostalo číslo 1

$25(x – 4)^2 – 144(y + 5)^2 = -3\,600$ /:(-3 600)

$$\frac{25(x-4)^2}{-3\,600} - \frac{144(y+5)^2}{-3\,600} = 1$$

odstránime z čitateľov čísla

$$\frac{(x-4)^2}{-144} - \frac{(y+5)^2}{-25} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(y+5)^2}{25} - \frac{(x-4)^2}{144} = 1$$

S(4;-5) a = 5 b = 12

$e = \sqrt{25 + 144} = 13$

pred zlomkom s y-om je kladné znamienko ⇒ AB ∥ *y*

A(4; -5 – 5) = (4; -10)
B(4; -5 + 5) = (4; 0)

C(4 – 12; -5) = (-8; -5)
D(4 + 12; -5) = (6; -5)

F_1(4; -5 – 13) = (4; -18)
F_2(4; -5 + 13) = (4; 8)

$k_{1,2} = \pm\frac{a}{b} = \pm\frac{5}{12}$

$y = \pm\frac{5}{12}(x – 4) – 5$

a_1: $y = \frac{5}{12}x - \frac{20}{3}$ a_2: $y = -\frac{5}{12}x - \frac{10}{3}$

a_1: $5x – 12y – 80 = 0$ a_2: $5x + 12y + 40 = 0$

Zistite súradnice stredu S; vrcholov A, B, C, D a ohnísk F_1, F_2 hyperboly, veľkosť polosí a, b, lineárnu excentricitu e hyperboly a napíšte rovnice asymptot: $\mathscr{H}$: $9x^2 - 6y^2 - 15x - 8y - 20 = 0$

$$9x^2 - 6y^2 - 15x - 8y - 20 = 0$$

$$9x^2 - 15x - 6y^2 - 8y = 20$$

$$9\left(x^2 - \frac{15}{9}x\right) - 6\left(y^2 + \frac{8}{6}y\right) = 20$$

$$9\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) - 6\left(y^2 + \frac{4}{3}y + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 20 + 9.\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 6.\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$9\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - 6\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 20 + \frac{25}{4} - \frac{8}{3}$$

$$9\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - 6\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{283}{12} \qquad /:\frac{283}{12}$$

$$\frac{9\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{283}{12}} - \frac{6\left(y+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{283}{12}} = 1$$

$$\frac{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{\frac{283}{12}}{9}} - \frac{\left(y+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{\frac{283}{12}}{6}} = 1$$

$$\mathscr{H}: \frac{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{283}{106}} - \frac{\left(y+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{283}{72}} = 1$$

$S\left(\frac{5}{6}; -\frac{2}{3}\right)$ $\qquad$ $a = \sqrt{\frac{283}{106}} = 1{,}634\ 0$ $\qquad$ $b = \sqrt{\frac{283}{72}} = 1{,}982\ 6$

$e = \sqrt{\frac{283}{106} + \frac{283}{72}} = \sqrt{\frac{1\ 415}{216}} = 2{,}559\ 5$

pred zlomkom s x-om je kladné znamienko ⇒ AB ∥ x

$A\left(\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{283}{106}}; -\frac{2}{3}\right) =$
$= (-0{,}800\ 6; -0{,}666\ 7)$

$C\left(\frac{5}{6}; -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{283}{72}}\right) =$
$= (0{,}833\ 3; 1{,}315\ 9)$

$F_1\left(\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{1\ 415}{216}}; -\frac{2}{3}\right) =$
$= (-1{,}726\ 1; -0{,}666\ 7)$

$B\left(\frac{5}{6} + \sqrt{\frac{283}{106}}; -\frac{2}{3}\right) =$
$= (2{,}467\ 3; -0{,}666\ 7)$

$D\left(\frac{5}{6}; -\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{283}{72}}\right) =$
$= (0{,}833\ 3; -2{,}649\ 2)$

$F_2\left(\frac{5}{6} + \sqrt{\frac{1\ 415}{216}}; -\frac{2}{3}\right) =$
$= (3{,}392\ 8; -0{,}666\ 7)$

$$k_{1,2} = \mp\frac{b}{a} = \mp\frac{\sqrt{\frac{283}{72}}}{\sqrt{\frac{283}{106}}} = \mp\frac{\sqrt{53}}{6} = \mp 1{,}213\ 4$$

$$y = \mp\frac{\sqrt{53}}{6}\left(x - \frac{5}{6}\right) - \frac{2}{3}$$

a_1: $y = -\frac{\sqrt{53}}{6}x + \frac{-24+5\sqrt{53}}{36}$ $\qquad$ a_2: $y = \frac{\sqrt{53}}{6}x + \frac{-24-5\sqrt{53}}{36}$

a_1: $6\sqrt{53}x + 36y + 24 - 5\sqrt{53} = 0$ $\qquad$ a_2: $6\sqrt{53}x - 36y - 24 + 5\sqrt{53} = 0$