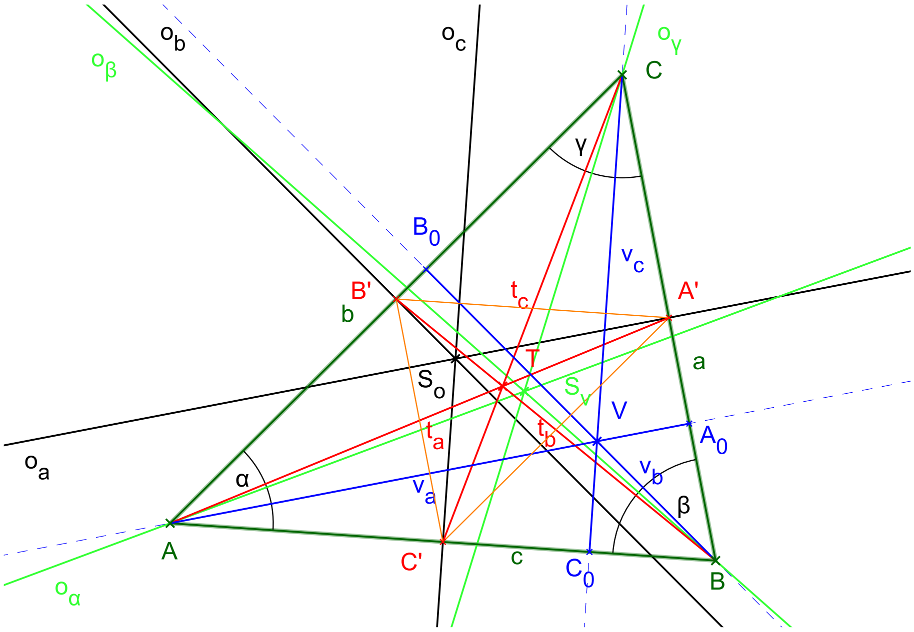
A háromszög kerülete és területe
(Obvod a obsah trojuholníka)

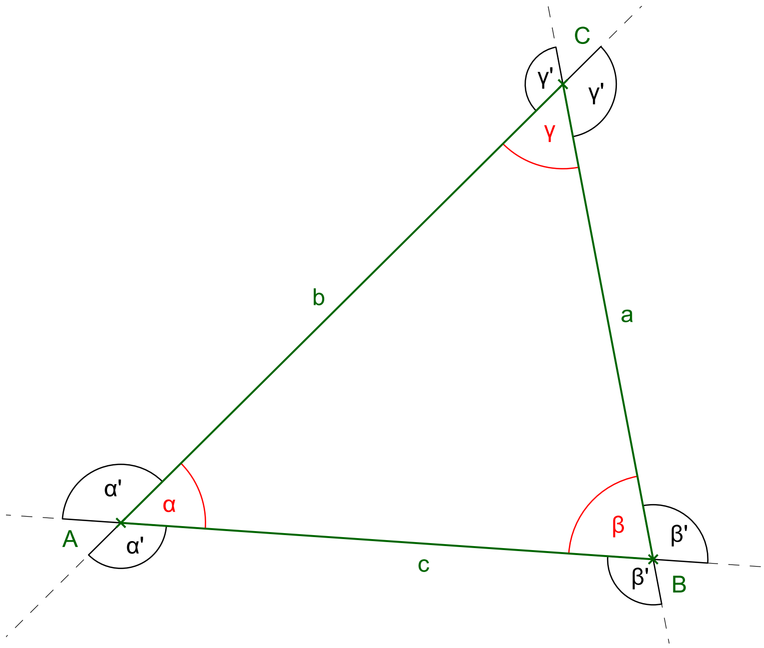
D. Három nem kollineáris pont (nem egy egyenesen fekvő) háromszöget alkot. Ezen pontok (A, B, C) a háromszög csúcsai.



a háromszög oldalai (a, b, c) – a csúcsok összekötő szakaszai

a háromszög belső szögei (α, β, γ) – az oldalak szöge, ahol a szögtartomány a háromszög belseje

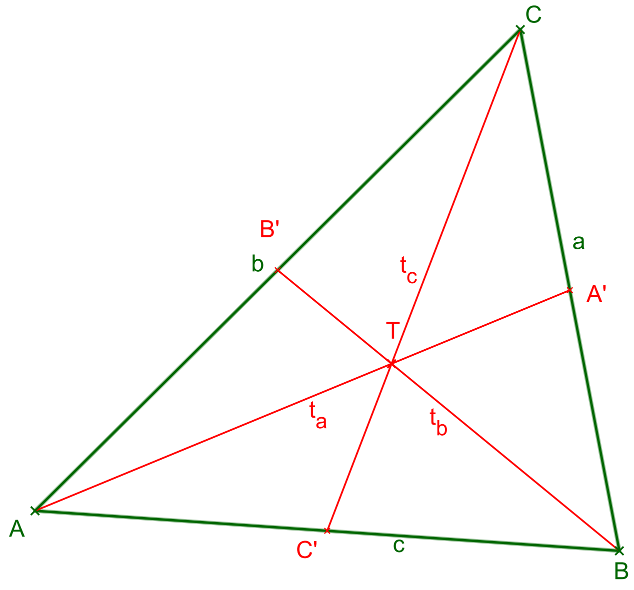
a háromszög külső szögei (α', β', γ') – az egyik oldal és a másik oldal meghosszabbítása által bezárt szög (kiegészítő szög)



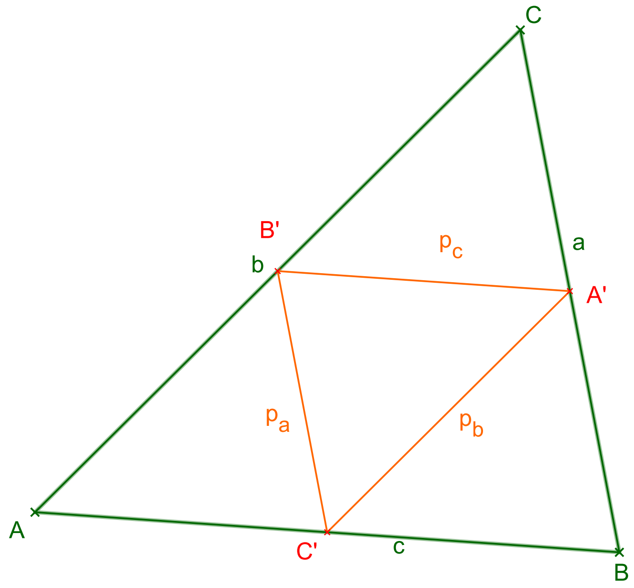
az oldalak felezőpontjai (A', B', C')

súlyvonalak (t_a, t_b, t_c,) – az oldalak felezőpontjait a csúcsokkal összekötő egyenesek

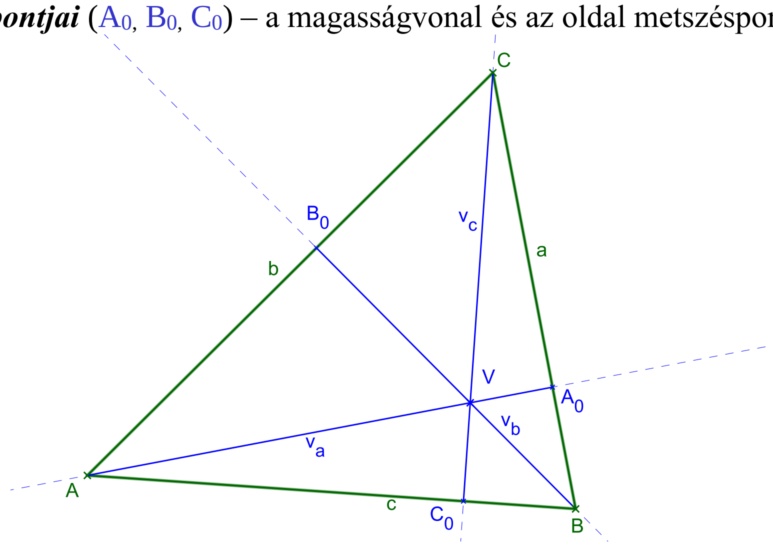
a háromszög súlypontja (***középpont***) (T) – a súlyvonalak metszéspontja



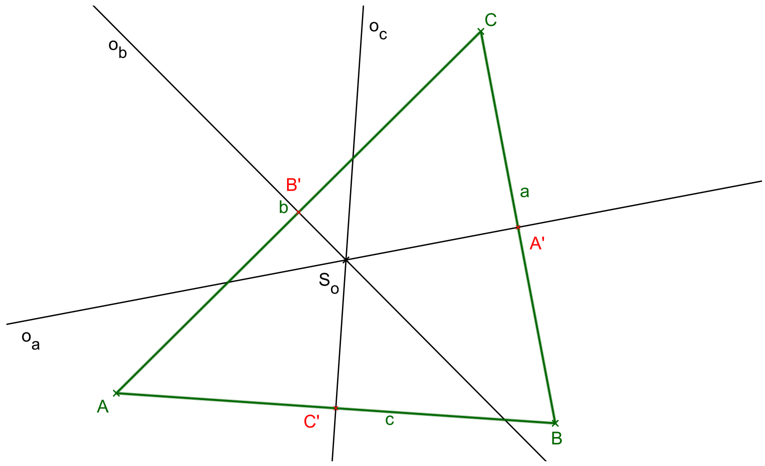
a háromszög középvonalai (p_a, p_b, p_c) – az oldalfelezőket összekötő szakaszok: párhuzamosak az oldalakkal és feleakkorák ⇒ az AC'A'B', BA'B'C', CB'C'A' négyszögek paralelogrammák, melyek területe egyenlő



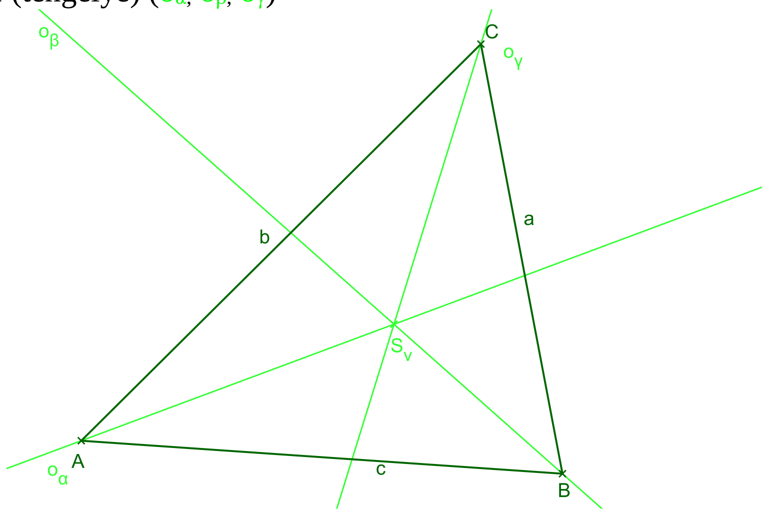
a háromszög magasságvonalai (v_a, v_b, v_c) – a csúcsokból a szemközti oldalakra bocsájtott merőlegesek
a háromszög magasságpontja (***ortocentrum***) (V) – a magasságvonalak metszéspontja
a magasságvonalak talppontjai (A_0, B_0, C_0) – a magasságvonal és az oldal metszéspontja



az oldalak felezőmerőlegese (o_a, o_b, o_c) – az oldal felezőpontjában húzott merőleges egyenes

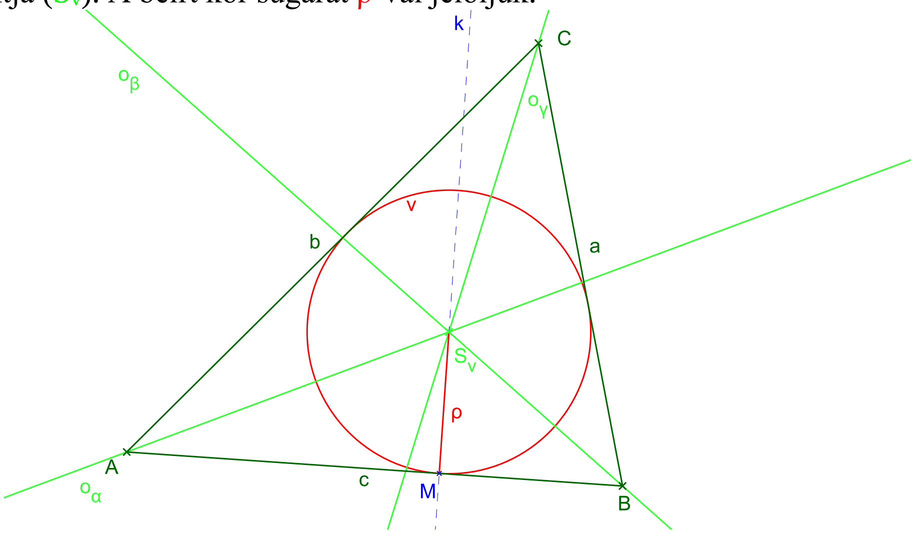


a belső szögek szögfelezői (tengelye) (o_α, o_β, o_γ)

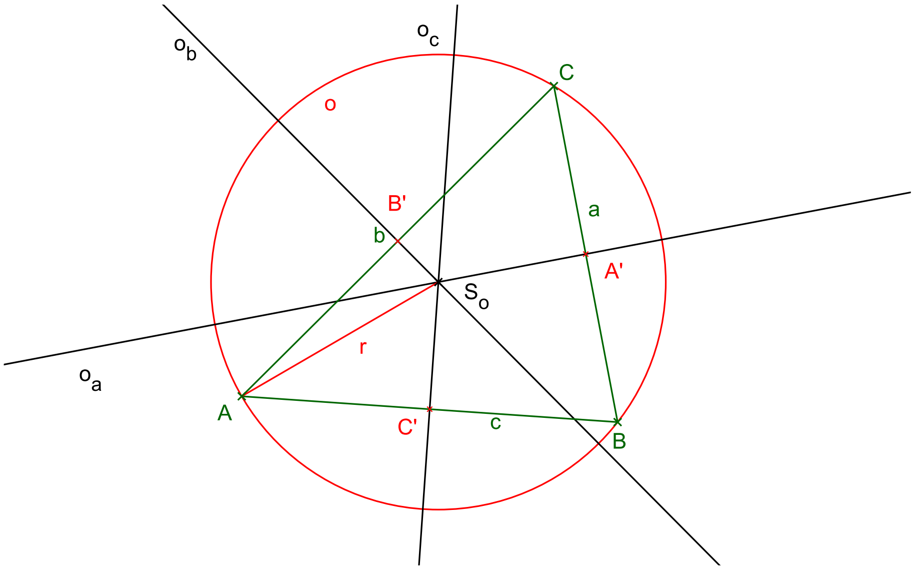


T. Bármely háromszöghöz létezik beírt és körül írt kör.

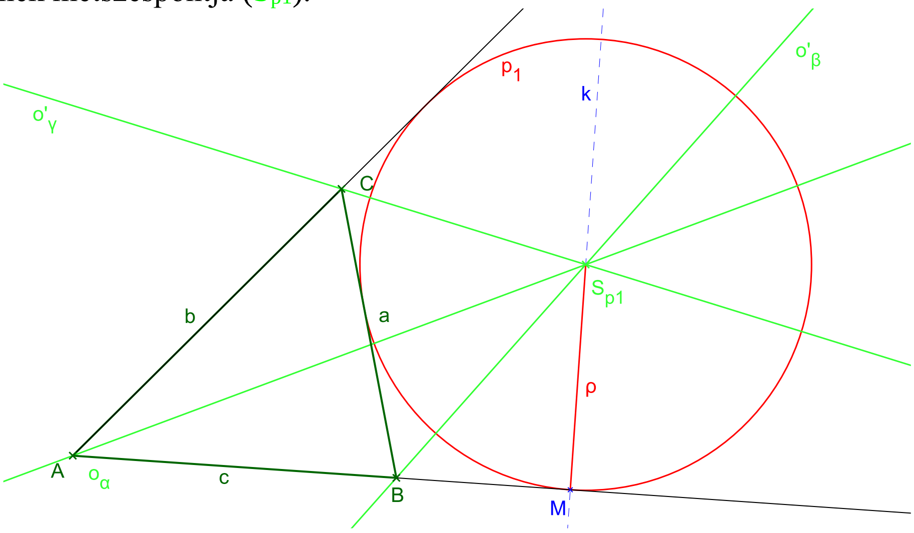
A háromszögbe írt kör az háromszög mindhárom oldalát érinti. Ezen kör középpontja a szögfelezők metszéspontja (S_v). A beírt kör sugarát ρ-val jelöljük.



A háromszög köré írt kör áthalad a háromszög csúcsain. Ezen kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja (S_o). A körül írt kör sugarát r-rel jelöljük.



A háromszöghöz írt kör (mindhárom oldalhoz létezik → összesen 3) érinti a háromszög egyik oldalát és a másik két oldal meghosszabbítását. Ezen körök középpontja az egyik belső- és a másik két külső szög szögfelezőinek metszéspontja (S_{p1}).



T. (háromszög-egyenlőtlenség) A háromszög bármely két oldala hosszának összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál.

$a + b > c$ $\qquad$ $a + c > b$ $\qquad$ $b + c > a$

T. A háromszög belső szögeinek összege 180°.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

T. Egy háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög található.

$a > b \Rightarrow \alpha > \beta$

T. A háromszög bármely külső szöge egyenlő a másik két belső szögének összegével.

$\alpha' = \beta + \gamma$

T. A súlypont a súlyvonalakat harmadolja – két harmadra (a hosszabb rész – a T-től a csúcsig) és egy harmadra (a rövidebb rész – a T-től az oldal felezőpontjáig) → aránya tehát: 2 : 1

a háromszögek osztályozása belső szögeik alapján

hegyesszögű háromszög (ostrouhlý trojuholník) – minden belső szöge 90°-nál kisebb (a V magasságpont belső pont)

derékszögű háromszög (pravouhlý trojuholník) – az egyik belső szöge 90° (a V a derékszög csúcsa)

tompaszögű háromszög (tupouhlý trojuholník) – az egyik belső szöge 90°-nál nagyobb (a V külső pont)

oldalak szerinti osztályozás

általános háromszög (všeobecný trojuholník) – mindhárom oldala különböző

egyenlő szárú háromszög (rovnoramenný trojuholník) – van két egybevágó oldala: szárak (ramená); a harmadik: alap (základňa)

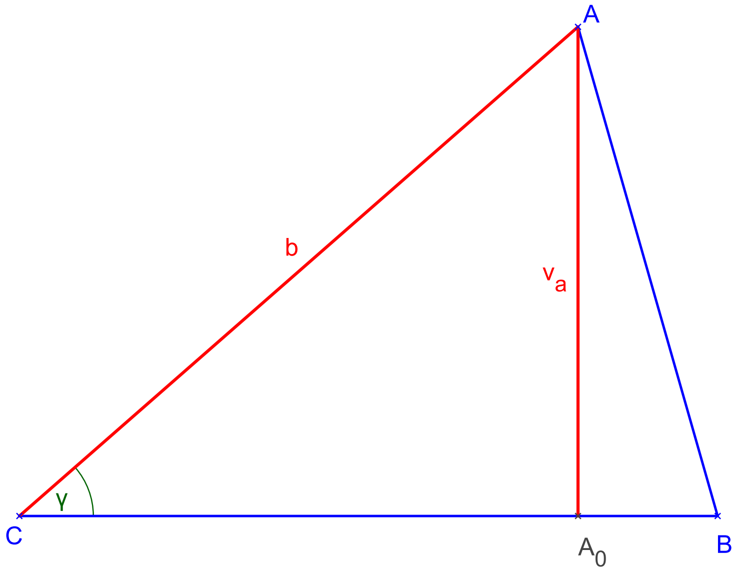
az alapon fekvő két szöge egybevágó; a szárak szöge eltér

egyenlő oldalú (szabályos) háromszög (rovnostranný [pravidelný] trojuholník) – mindhárom oldala egybevágó ⇒ belső szögei is egybevágóak ($\alpha = \beta = \gamma = 60°$)

1. általános háromszög

$$o = a + b + c$$

$$S = \frac{a.v_a}{2} = \frac{b.v_b}{2} = \frac{c.v_c}{2}$$



szögfüggvényt alkalmazva az ACA_0 derékszögű háromszögben kifejezzük a v_a oldalt – ezt behelyettesítve a terület alapképletébe, kapunk egy összefüggést, hogy számítsuk ki a területet két oldalból és a közre zárt szögből

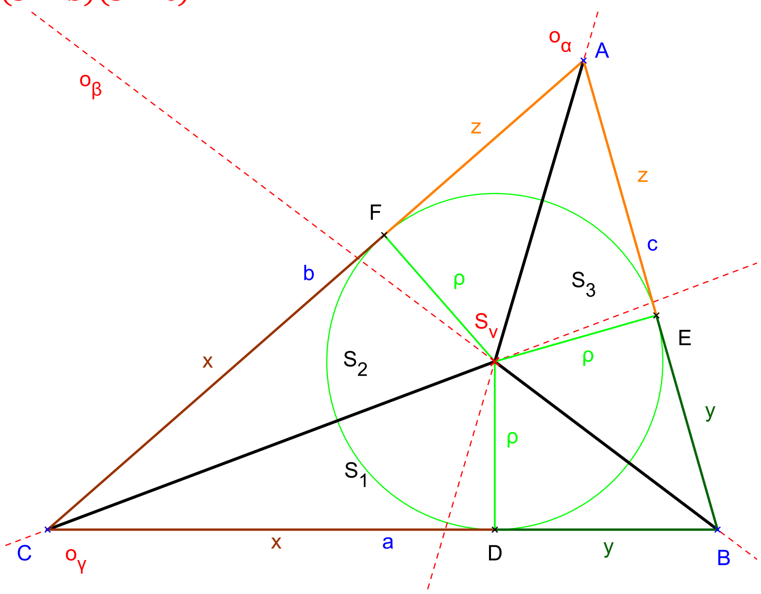
$$\sin\gamma = \frac{v_a}{b} \rightarrow v_a = b.\sin\gamma$$

$$S = \frac{ab.\sin\gamma}{2} = \frac{ac.\sin\beta}{2} = \frac{bc.\sin\alpha}{2}$$

Héron-képlet – területszámítás a háromszög három oldalából

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{o}{2}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



A beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja – ezek három kisebb háromszögre osztják háromszögünket: jelöljük ezek területét S_1, S_2 és S_3-mal. Területük kiszámításához felhasználjuk, hogy oldalaik az eredeti nagy háromszög oldalai, és a hozzájuk tartozó magasság pedig a beírt kör sugara. A háromszög területe ezen három terület összege.

$$S_1 = \frac{a.\rho}{2};\ S_2 = \frac{b.\rho}{2};\ S_3 = \frac{c.\rho}{2}$$

összeadva és ρ-t kiemelve egy újabb összefüggést kapunk a háromszög területének kiszámítására a beírt kör sugarának ismeretében

$$S = \frac{\rho.(a+b+c)}{2} = \frac{\rho.o}{2} = \rho.s$$

átrendezve a beírt kör sugarának kiszámítására szolgál

$$\rho = \frac{2.S}{a+b+c} = \frac{2.S}{o} = \frac{S}{s}$$

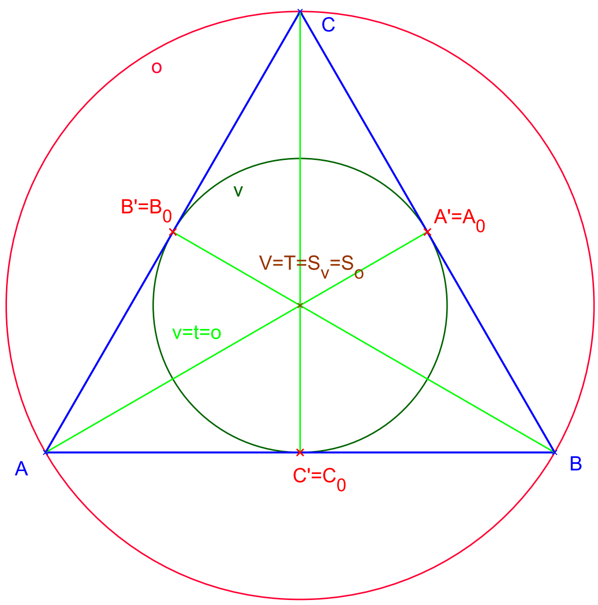
a körülírt kör sugarából is számítható a terület

$$S = \frac{abc}{4r}$$

átrendezve a körülírt kör sugarát számíthatjuk vele

$$r = \frac{abc}{4S}$$

2. egyenlő oldalú (szabályos) háromszög



$$o = 3a$$

$$S = \frac{a.v}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.v^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}.r^2 = 3\sqrt{3}.\rho^2$$

a magasság, a súlyvonal, a belső szög szögfelezője és az oldalfelező merőleges egybe esik és egybevágó ⇒ a magasságpont, a súlypont, a beírt és a körül írt kör középpontja egyazon pont

$$v = t = o = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

a beírt kör sugara a súlyvonal hosszának harmada, míg a körülírt köré a kétharmada

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}a \qquad r = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

3. derékszögű háromszög

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2} = \frac{a^2 \operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{c^2 \sin 2\beta}{4} = r^2.\sin 2\beta$$

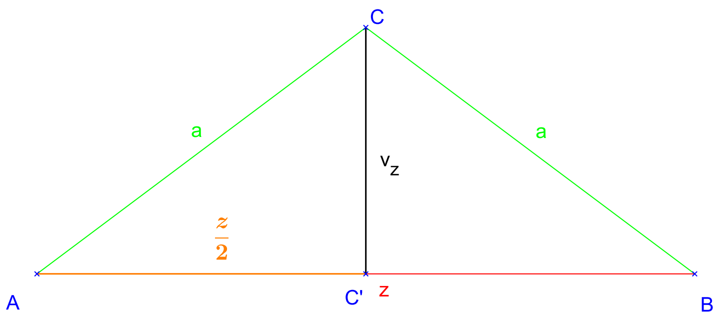
csak egy valódi magassága van – a másik két magasság egybeesik a befogókkal (az egyik befogó magassága a másik befogó és fordítva)

$$v = \frac{ab}{c}$$

$$\rho = \frac{ab}{a+b+c} \qquad r = \frac{c}{2}$$

példa:

Számítsuk ki annak az egyenlő szárú háromszögnek az S területét, beírt körének ρ sugarát, illetve körülírt körének r sugarát, melynek alapja 24, szárai pedig 15.



a magasság felezi az alapot ⇒ Pitagorasz tételét alkalmazva

$v_z^2 = a^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$

$v_z = 9$

$S = \frac{z.v_z}{2} = \frac{24.9}{2} = 108$

$S = \frac{o.\rho}{2} \rightarrow \rho = \frac{2.S}{o} = \frac{2.108}{24+2.15} = \frac{216}{54} = 4$

$S = \frac{a.b.c}{4r} \rightarrow r = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{24.15.15}{4.108} = \frac{5\,400}{432} = 12{,}5$

Határozzuk meg a szabályos háromszög a oldalát, ha ismerjük területét: S = 850.

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \rightarrow a^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} = \frac{4.850}{\sqrt{3}} = 1\,962{,}991$

$a = 44{,}306$

Számítsuk ki az ABC háromszög S területét, v_a, v_b, v_c magasságainak hosszát, továbbá α, β, γ belső szögeit, ha ismertek oldalai: a = 12, b = 15, c = 17.

először a területét számoljuk ki Herón-képlettel; majd az alapképletekből kifejezve a magasságokkal folytatjuk

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+15+17}{2} = 22$

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{22.10.7.5} = \sqrt{7\,700} = 87{,}750$

$S = \frac{a.v_a}{2} \rightarrow v_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.87{,}750}{12} = 14{,}625$

$v_b = \frac{2S}{b} = \frac{2.87{,}750}{15} = 11{,}700$

$v_c = \frac{2S}{c} = \frac{2.87{,}750}{17} = 10{,}323$

új összefüggésünkkel, melyben a terület két oldalból és a közrezárt szögből számítható, a szögeket számítjuk

$S = \frac{ab.\sin\gamma}{2} \rightarrow \sin\gamma = \frac{2S}{a.b} = \frac{2.87{,}750}{12.15} = 0{,}975\,0 \rightarrow \gamma = \sin^{-1} 0{,}975\,0 = 77°10'$

$\sin\beta = \frac{2S}{a.c} = \frac{2.87{,}750}{12.17} = 0{,}860\,3 \rightarrow \beta = \sin^{-1} 0{,}860\,3 = 59°21'$

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 136°31' = 43°29'$

Számítsuk ki az ABC háromszög o kerületét, ha területe S = 370, oldalaira pedig érvényes a : b : c = 5 : 9 : 10.

új ismeretlent vezetünk be (szubsztitúció) úgy, hogy az arány megfelelő legyen

$a = 5x$

$b = 9x$

$c = 10x$

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5x+9x+10x}{2} = 12x$

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{12x.7x.3x.2x} = \sqrt{504x^4} = 22{,}450x^2$

$22{,}450x^2 = 370$

$x^2 = 16{,}481$

$x = 4{,}060$

$o = 24x = 24.4{,}060 = 97{,}433$