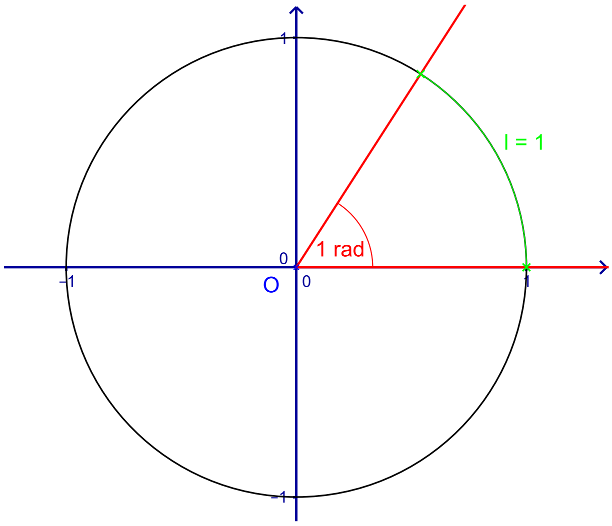
Az irányított szög
(Orientovaný uhol)

D. Egy közös kezdőponttal rendelkező két félegyenes a síkot két részre osztja. Az egyik a szögtartomány belseje (belső pontok) a másik a szög külseje (külső pontok). A félegyenesek a szög szárai/szögvonal (ramená uhla), a közös kezdőpont a szög csúcsa (vrchol uhla).

D. (fokmérték – stupňová miera) Egy szög 1° nagyságú, ha 90-szerese derékszög.

D. (ívmérték – oblúková miera) Egy szög 1 rad nagyságú, ha az általa meghatározott körív hossza azonos a körvonal sugarával.



Hogy térhetünk át fokmértékről ívmértékre és fordítva? A teljes szög (a kör) 360°-os. Az egységsugarú kör kerülete az az r = 1 sugarú köré.

$$o = 2\pi.r = 2\pi.1 = 2\pi$$

Vagyis a 360° nagyságú szögnek 2π rad ívmérték felel meg. Tehát 180° = π rad. Ebből kapjuk az összefüggést:

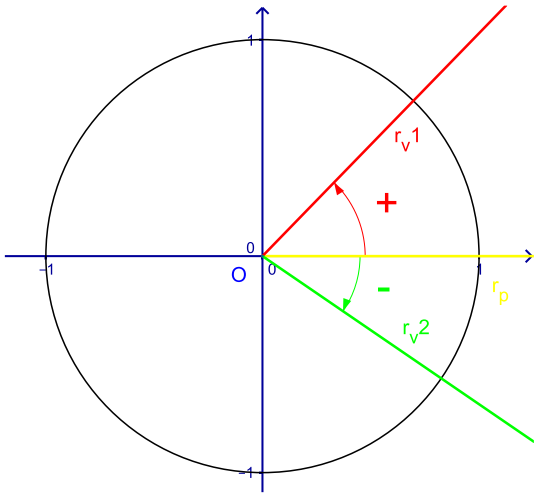
$$x\ [\text{rad}] = \frac{\alpha[°]}{180°}.\pi\ \text{rad} \qquad \alpha\ [°] = \frac{x[\text{rad}]}{\pi\ \text{rad}}.180°$$

1 rad = 57°17'44,806 247"

15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π

D. Helyezzük el szögünket egy koordináta-rendszerbe. Csúcsa legyen az origóban (a koordináta-rendszer kezdőpontjában), Egyik szára (nyugvó szár/kezdőszár) essen egybe az x tengely pozitív felével. Kezdetben a másik szár (mozgó szár/végszár) együtt van a kezdőszárral. Még szükségünk van egy origó középpontú egységkörre.

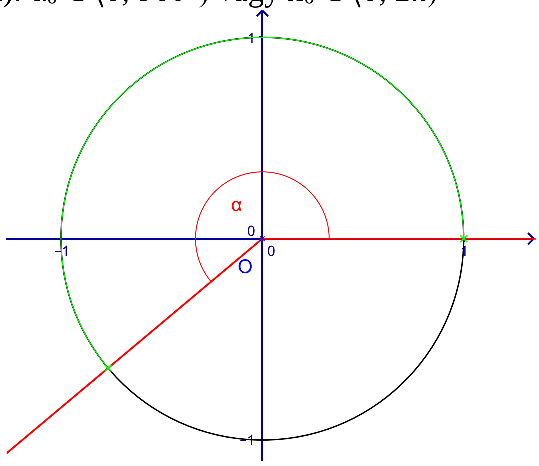
Ezek után elmozdulunk a mozgó szárral. Attól függően kapunk pozitív vagy negatív előjelőű irányított szöget, hogy az elmozdulás az óramutató járásával ellentétes (pozitív) vagy egyező (negatív).



A mozgó szár a teljes szög megtétele után is folytathatja mozgását – így kapunk 360°-nál nagyobb szöget (2π). Ha a mozgó szár többször is megteszi a teljes kört, akkor a 360° (2π radián) annyiszorosát adjuk hozzá a szöghöz, amennyiszer körbement (vagy ha negatív irányban mozgott, akkor a negatív számszorosát.

Mikor megáll a szár, létrejön a szög. Erre a szöre nézve nem tudjuk megmondani, hogy a mozgó szár mennyiszer tette meg a teljes kör, sem az előjelét (vagyis hogy milyen irányban mozgott). De meg tudjuk határozni, hogy milyen szög felel meg neki az alapintervallumból.

alapintervallum (základný interval): $\alpha_0 \in \langle 0; 360°)$ vagy $x_0 \in \langle 0; 2\pi)$



Vagyis az ábrán látható szög $\alpha_0 = 220°$ vagy $x_0 = 3{,}840$ rad.

De ugyanúgy lehet:

$\alpha_1 = 1.360° + 220° = 580°$ $\alpha_2 = 3.360° + 220° = 1\,300°$

$\alpha_3 = 9.360° + 220° = 3\,460°$ $\alpha_4 = -1.360° + 220° = -140°$

$\alpha_5 = -4.360° + 220° = -1\,220°$ …

$x_1 = 1.2\pi + 3{,}840$ rad $= 10{,}123$ rad $x_2 = 3.2\pi + 3{,}840$ rad $= 22{,}689$ rad

$x_3 = 9.2\pi + 3{,}840$ rad $= 60{,}388$ rad $x_4 = -1.2\pi + 3{,}840$ rad $= -2{,}443$ rad

$x_5 = -4.2\pi + 3{,}840$ rad $= -21{,}293$ rad …

Ezzel kiterjesztettük a szög fogalmát az összes valós számra. Bármilyen szöget kifejezhetünk a teljes szög egész számszorosaként (a mozgó szár ahányszor körbefordul – a 360°-os szög többszöröse) plusz egy szög az alapintervallumból:

$\alpha = z.360° + \alpha_0$ $z \in \mathbb{Z} \wedge \alpha_0 \in \langle 0; 360°)$ fokokban kifejezve, vagy

$x = z.2\pi + x_0$ $z \in \mathbb{Z} \wedge \alpha_0 \in \langle 0; 2\pi)$ radiánokban.

Hogy határozhatjuk meg a legkönnyebben ezt a szöget az alapintervallumból?

$2\,873° = z.360° + \alpha_0$

elosztjuk 360-nal

$2\,873 : 360 = 7{,}981$

az egész rész (ha pozitív a szögünk) lesz a z

a hányadosból kivonjuk az egész részt

$7{,}981 - 7 = 0{,}981$

a maradékot visszaszorozzuk 360-nal (esetleg kerekítünk ⇐ a számológép pontossága)

$0{,}981.360 = 353$

az eredmény a keresett szög az alapintervallumból → ezek után már írhatjuk:

$2\,873° = 7.360° + 353°$

M. Ha jól számoltunk, akkor a jobboldalt kiszámolva az eredeti szöget kell visszakapnunk.

Mi van, ha szögünk negatív?

$-3\,127° = z.360° + \alpha_0$

elosztjuk 360-nal

$-3\,127:360 = -8{,}686$

úgy adunk hozzá egy természetes számot, hogy az összeg pozitív legyen és 1-nél kisebb

$-8{,}686 + 9 = 0{,}314$

ez a természetes szám a z szám ellentettje (vagyis $-z$ lesz a szorzótényező)

a maradékot visszaszorozzuk 360-nal (esetleg kerekítünk ⇐ a számológép pontossága)

$0{,}314.360 = 113$

az eredmény a keresett szög az alapintervallumból → ezek után már írhatjuk:

$-3\,127° = -9.360° + 113°$

Mit tegyünk, ha szögünk ívmértékben (radiánokban) adott?

$372{,}13 \text{ rad} = z.2\pi + x_0$

elosztjuk 2π-vel

$372{,}13:(2\pi) = 59{,}226$

az egész rész (ha pozitív a szögünk) lesz a z

a hányadosból kivonjuk az egész részt

$59{,}226 - 59 = 0{,}226$

a maradékot visszaszorozzuk 2π-vel

$0{,}226.2\pi = 1{,}422$

az eredmény a keresett szög az alapintervallumból → ezek után már írhatjuk:

$372{,}13 \text{ rad} = 59.2\pi + 1{,}422 \text{ rad}$

Negatív szög esetén hasonló az eljárás, mint fokmértéknél.

$-17{,}42 \text{ rad} = z.2\pi + x_0$

elosztjuk 2π-vel

$17{,}42:(2\pi) = -2{,}772$

úgy adunk hozzá egy természetes számot, hogy az összeg pozitív legyen és 1-nél kisebb

$-2{,}772 + 3 = 0{,}228$

ez a természetes szám a z szám ellentettje (vagyis $-z$ lesz a szorzótényező)

a maradékot visszaszorozzuk 2π-vel

$0{,}228.2\pi = 1{,}430$

az eredmény a keresett szög az alapintervallumból → ezek után már írhatjuk:

$-17{,}42 \text{ rad} = -3.2\pi + 1{,}430 \text{ rad}$