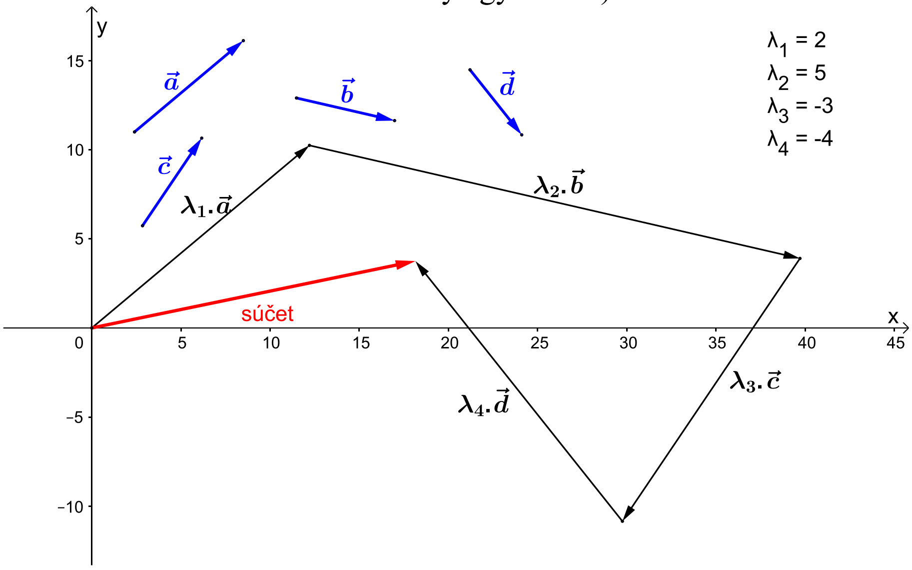
Vektorok lineáris kombinációja

(Lineárna kombinácia vektorov)

Ha van néhány vektorunk, melyeket megszorzunk valamilyen számokkal és ezek után őket összeadjuk, azt mondjuk, hogy létrehoztunk egy vektort az adott vektorok *lineáris kombinációjaként* (számmal történő szorzásnál illetve összeadásnál is vektor keletkezik ⇒ az eredmény egy vektor).



D. Legyenek adottak az $\overrightarrow{a_1}$; $\overrightarrow{a_2}$; $\overrightarrow{a_3}$; … ; $\overrightarrow{a_n}$ vektorok. A $\vec{k}$ ***vektor az*** $\overrightarrow{a_1}$; $\overrightarrow{a_2}$; $\overrightarrow{a_3}$; … ; $\overrightarrow{a_n}$ ***vektorok lineáris kombinációja***, ha találhatók olyan λ_1; λ_2; λ_3; … ; λ_n, ∈ ℝ valós számok, hogy:

$$\vec{k} = \lambda_1.\overrightarrow{a_1} + \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + \lambda_3.\overrightarrow{a_3} + \ldots + \lambda_n.\overrightarrow{a_n}.$$

példa:

Határozzuk meg a vektorok lineáris kombinációjának hosszát: $\vec{a} = (2; -3)$; $\vec{b} = (-5; 4)$; $\vec{c} = (0; 2)$; $\vec{d} = (1; 0)$.

a, $\vec{e} = 4.\vec{a} + \vec{b} - 3.\vec{d}$ b, $\vec{f} = 5.\vec{a} - 2.\vec{b} + \vec{c}$ c, $\vec{g} = -3.\vec{a} + 4.\vec{b} + 2.\vec{c} - 7.\vec{d}$

a, $\vec{e} = 4.(2; -3) + (-5; 4) - 3.(1; 0) = (8; -12) + (-5; 4) + (-3; 0) = (0; -8)$

$|\vec{e}| = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = \sqrt{0 + 64}$

$|\vec{e}| = 8$

---

b, $\vec{f} = 5.(2; -3) - 2.(-5; 4) + (0; 2) = (10; -15) + (10; -8) + (0; 2) = (20; -21)$

$|\vec{f}| = \sqrt{20^2 + (-21)^2} = \sqrt{400 + 441}$

$|\vec{f}| = 29$

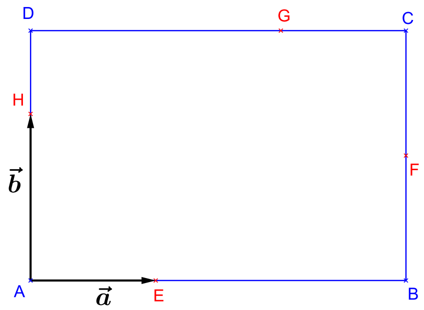
---

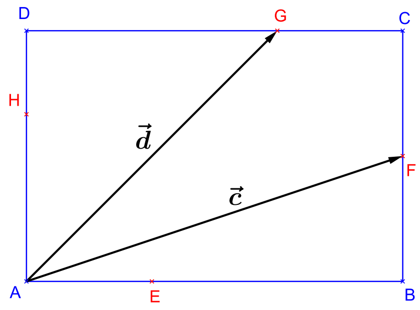
c, $\vec{g} = -3.(2; -3) + 4.(-5; 4) + 2.(0; 2) - 7.(1; 0) = (-6; 9) + (-20; 16) + (0; 4) + (-7; 0) = (-33; 29)$

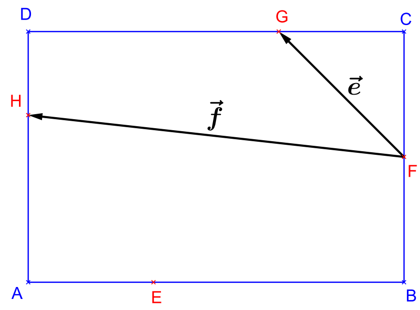
$|\vec{g}| = \sqrt{(-33)^2 + 29^2} = \sqrt{1\,089 + 841}$

$|\vec{g}| = 43{,}932$

Az ABCD téglalap E pontja az AB oldal harmadában az A csúcshoz közelebb fekszik; az F pont a BC oldal felezőpontja; a G pont a CD oldalt harmadolja a C csúcshoz közelebb; a H pedig a D csúcshoz közelebb fekvő harmadolója a DA oldalnak. Fejezzük ki az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FH}$ vektorokat az alábbi vektorok segítségével:







a, $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ a $\vec{b} = \overrightarrow{AH}$ b, $\vec{c} = \overrightarrow{AF}$ a $\vec{d} = \overrightarrow{AG}$ c, $\vec{e} = \overrightarrow{FG}$ a $\vec{f} = \overrightarrow{FH}$

a,

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{a}$ — az $\vec{a}$ az AB oldal harmada ⇒ az egyharmad háromszorosa

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{b}$ — a $\vec{b}$ az AD oldal kétharmada ⇒ másfélszerese a kétharmadnak

$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\vec{b}$ — fele az $\overrightarrow{AD}$-nek

$\overrightarrow{DG} = 2\vec{a}$ — az AB oldal kétharmada ⇒ az egyharmad kétszerese

$\overrightarrow{CG} = -\vec{a}$ — az $\vec{a}$ vektor ellentettje

$\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ — a $\vec{b}$ vektorral ellentett irányú és feleakkora

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} - \left(3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} - 3\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

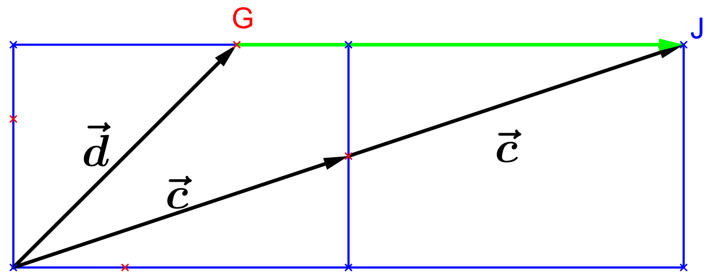
$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} = \frac{3}{4}\vec{b} - 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{b} - 3\vec{a}$

$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} = \vec{b} - \left(3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \vec{b} - 3\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

---

b,

először kifejezzük az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorokat a $\vec{c}$ és a $\vec{d}$ vektorok segítségével, majd felhasználjuk az a, feladat eredményeit



a $\overrightarrow{GJ}$ vektor az $\vec{a}$ vektorral azonos irányú, de a hossza a négyszerese (az AB oldal harmada + az egész AB oldal)

$\overrightarrow{GJ} = 2\vec{c} - \vec{d} \;\rightarrow\; \vec{a} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{4}\left(2\vec{c} - \vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}$

próbáljuk alkalmazni az a, feladat eredményeit – elimináljuk a $\vec{b}$ vektort

$\vec{c} = \overrightarrow{AF} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

$\vec{d} = \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$

$\vec{c} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ /.4

$\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$ /.(-2)

$4\vec{c} = 12\vec{a} + 3\vec{b}$

$-2\vec{d} = -3\vec{b} - 4\vec{a}$

$4\vec{c} - 2\vec{d} = 8\vec{a}$ /:8

$\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d} = \vec{a}$

algebrai úton ugyanazon eredményre jutottunk, mint grafikusan

most az $\vec{a}$ vektort elimináljuk

$\vec{c} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ /.2

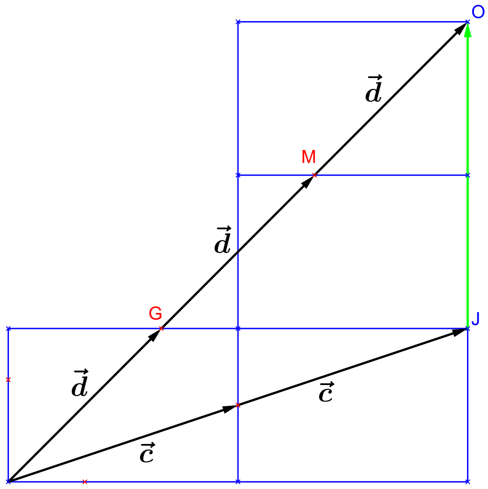
$\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$ /.(-3)

$2\vec{c} = 6\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

$-3\vec{d} = -\frac{9}{2}\vec{b} - 6\vec{a}$

$2\vec{c} - 3\vec{d} = -3\vec{b}$ /:(-3)

$-\frac{2}{3}\vec{c} + \vec{d} = \vec{b}$



az $\overrightarrow{OJ}$ vektor a $\vec{b}$ vektorral azonos irányú, viszont háromszor akkora (az AD oldal kétszerese)

$\overrightarrow{OJ} = 3\vec{d} - 2\vec{c} \rightarrow \vec{b} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}(3\vec{d} - 2\vec{c}) = \vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}$

grafikus módszerrel ugyanaz az eredmény, mint átalakításokkal

most pedig az a, feladat eredményeibe helyettesítünk be

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} = 3\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) = \frac{3}{2}\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{d}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{3}{2}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{3}{2}\vec{d} - \vec{c}$

$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{3}{4}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{3}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{DG} = 2\vec{a} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{CG} = -\vec{a} = -\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) = \frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{AF} = \vec{c}$

$\overrightarrow{AG} = \vec{d}$

$\overrightarrow{FG} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = -\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) + \frac{3}{4}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{d} + \frac{3}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} = -\vec{c} + \vec{d}$

ábránkon láthatjuk, hogy az $\overrightarrow{FG}$ vektor a $\vec{c}$ és a $\vec{d}$ vektorok végpontjainak összekötése $\Rightarrow$ a két vektor különbsége – a végpontja a kisebbítendő, a kezdőpontja pedig a kivonandó: $\vec{d} - \vec{c}$

$\overrightarrow{FH} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = -3\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) + \frac{1}{4}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = -\frac{3}{2}\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d} + \frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{6}\vec{c} = \vec{d} - \frac{5}{3}\vec{c}$

---

c,

most is az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektort fejezzük ki, csak itt az $\vec{e}$ és a $\vec{f}$ vektorokkal, utána pedig alkalmazzuk az a, feladat eredményeit

újra az a, feladat eredményeit használjuk – elimináljuk a $\vec{b}$ vektort

$\vec{e} = \overrightarrow{FG} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

$\vec{f} = \overrightarrow{FH} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

$\vec{e} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ /.4

$\vec{f} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ /.(-12)

$4\vec{e} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$

$-12\vec{f} = 36\vec{a} - 3\vec{b}$

$4\vec{e} - 12\vec{f} = 32\vec{a}$ /:32

$\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f} = \vec{a}$

másodszor pedig az $\vec{a}$ vektort elimináljuk

$\vec{e} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ /.(-3)

$\vec{f} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

$-3\vec{e} = 3\vec{a} - \frac{9}{4}\vec{b}$

$\vec{f} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

$-3\vec{e} + \vec{f} = -2\vec{b}$ /:(-2)

$\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f} = \vec{b}$

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} = 3\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{3}{8}\vec{e} - \frac{9}{8}\vec{f}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{9}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f}$

$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{9}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}$

$\overrightarrow{DG} = 2\vec{a} = 2\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{1}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f}$

$\overrightarrow{CG} = -\vec{a} = -\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{3}{8}\vec{f} - \frac{1}{8}\vec{e}$

$\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{1}{4}\vec{f} - \frac{3}{4}\vec{e}$

$\overrightarrow{AF} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = 3\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{3}{8}\vec{e} - \frac{9}{8}\vec{f} + \frac{9}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f} = \frac{3}{2}\vec{e} - \frac{3}{2}\vec{f}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{9}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f} + \frac{1}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f} = \frac{5}{2}\vec{e} - \frac{3}{2}\vec{f}$

$\overrightarrow{FG} = \vec{e}$

$\overrightarrow{FH} = \vec{f}$

Fejezzük ki a $\vec{k}$ vektort a többi vektor lineáris kombinációjaként:

a, $\vec{k}(3; -5)$; $\vec{a}(-2; 1)$; $\vec{b}(-3 -2)$

b, $\vec{k}(1; 1)$; $\vec{c}(3; -4)$; $\vec{d}(1; 2)$

c, $\vec{k}(-7; 10)$; $\vec{e}(5; 3)$; $\vec{f}(-2; 3)$

d, $\vec{k}(-2; -6)$; $\vec{g}(6; 2)$; $\vec{h}(-1; 1)$

a, $\exists\lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\vec{k} = \lambda_1.\vec{a} + \lambda_2.\vec{b}$

$\vec{k} = \lambda_1.\vec{a} + \lambda_2.\vec{b} = \lambda_1.(-2; 1) + \lambda_2.(-3; -2) = (-2\lambda_1; \lambda_1) + (-3\lambda_2; -2\lambda_2) = (-2\lambda_1 - 3\lambda_2; \lambda_1 - 2\lambda_2)$

$(3; -5) = (-2\lambda_1 - 3\lambda_2; \lambda_1 - 2\lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ -5 = \lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases}$

$3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2$

$\underline{-5 = \lambda_1 - 2\lambda_2}$ /.2

$3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2$

$\underline{-10 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2}$ /I. + II.

$-7 = -7\lambda_2$ /:(-7)

$1 = \lambda_2$

$-5 = \lambda_1 - 2.1$ /+ 2

$-3 = \lambda_1$

$\vec{k} = -3\vec{a} + 1\vec{b}$

---

b, $\exists \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}: \vec{k} = \lambda_1.\vec{c} + \lambda_2.\vec{d}$

$\vec{k} = \lambda_1.\vec{c} + \lambda_2.\vec{d} = \lambda_1.(3; -4) + \lambda_2.(1; 2) = (3\lambda_1; -4\lambda_1) + (\lambda_2; 2\lambda_2) = (3\lambda_1 + \lambda_2; -4\lambda_1 + 2\lambda_2)$

$(1; 1) = (3\lambda_1 + \lambda_2; -4\lambda_1 + 2\lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$

$1 = 3\lambda_1 + \lambda_2$ /.(-2)

$\underline{1 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2}$

$-2 = -6\lambda_1 - 2\lambda_2$

$\underline{1 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2}$ /I. + II.

$-1 = -10\lambda_1$ /:(-10)

$\frac{1}{10} = \lambda_1$

$1 = 3.\frac{1}{10} + \lambda_2$ $/-\frac{3}{10}$

$\frac{7}{10} = \lambda_2$

$\vec{k} = \frac{1}{10}\vec{c} + \frac{7}{10}\vec{d}$

---

c, $\exists \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}: \vec{k} = \lambda_1.\vec{e} + \lambda_2.\vec{f}$

$\vec{k} = \lambda_1.\vec{e} + \lambda_2.\vec{f} = \lambda_1.(5; 3) + \lambda_2.(-2; 3) = (5\lambda_1; 3\lambda_1) + (-2\lambda_2; 3\lambda_2) = (5\lambda_1 - 2\lambda_2; 3\lambda_1 + 3\lambda_2)$

$(-7; 10) = (5\lambda_1 - 2\lambda_2; 3\lambda_1 + 3\lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = 5\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 10 = 3\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases}$

$-7 = 5\lambda_1 - 2\lambda_2$ /.3

$\underline{10 = 3\lambda_1 + 3\lambda_2}$ /.2

$-21 = 15\lambda_1 - 6\lambda_2$

$\underline{20 = 6\lambda_1 + 6\lambda_2}$ /I. + II.

$-1 = 21\lambda_1$ /:21

$-\frac{1}{21} = \lambda_1$

$-7 = 5.\left(-\frac{1}{21}\right) - 2\lambda_2$

$-\frac{142}{21} = -2\lambda_2$ /:(-2)

$\frac{71}{21} = \lambda_2$

$\vec{k} = -\frac{1}{21}\vec{e} + \frac{71}{21}\vec{f}$

---

d, $\exists \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}: \vec{k} = \lambda_1.\vec{g} + \lambda_2.\vec{h}$

$\vec{k} = \lambda_1.\vec{g} + \lambda_2.\vec{h} = \lambda_1.(6; 2) + \lambda_2.(-1; 1) = (6\lambda_1; 2\lambda_1) + (-1\lambda_2; \lambda_2) = (6\lambda_1 - \lambda_2; 2\lambda_1 + \lambda_2)$

$(-2; -6) = (6\lambda_1 - \lambda_2; 2\lambda_1 + \lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 6\lambda_1 - \lambda_2 \\ -6 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$

$-2 = 6\lambda_1 - \lambda_2$

$\underline{-6 = 2\lambda_1 + \lambda_2}$ /I. + II.

$-8 = 8\lambda_1$ /:8

$-1 = \lambda_1$

$-6 = 2.(-1) + \lambda_2$

$-4 = \lambda_2$

$\vec{k} = -\vec{g} - 4\vec{h}$