Vektorok lineáris függősége és függetlensége

(Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov)

D₁. Vektorok ***lineárisan függők***, ha közülük legalább az egyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

$$\exists\, \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; \dots ; \lambda_n \in \mathbb{R}: \overrightarrow{a_1} = \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + \lambda_3.\overrightarrow{a_3} + \lambda_4.\overrightarrow{a_4} + \dots + \lambda_n.\overrightarrow{a_n}$$

D₂. Vektorok ***lineárisan függők***, ha belőlük a nullvektor előállítható olyan lineáris kombinációként, ahol legalább egy együttható nullától különböző szám.

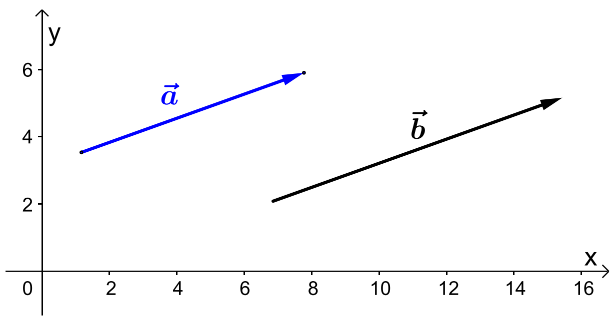
$$\vec{0} = \lambda_1.\overrightarrow{a_1} + \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + \lambda_3.\overrightarrow{a_3} + \dots + \lambda_n.\overrightarrow{a_n} \Rightarrow \exists\, \lambda_i \neq 0 \wedge i \in [1; n]$$

D₁. Vektorok ***lineárisan függetlenek***, ha közülük semelyik nem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként.

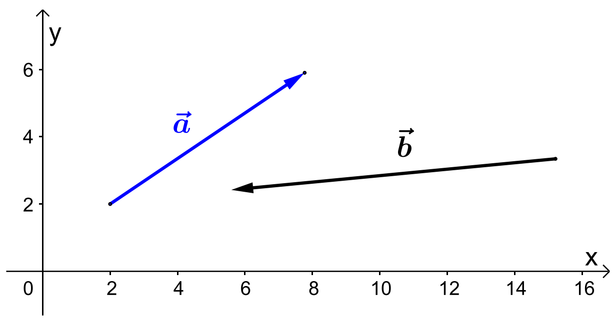
D₂. Vektorok ***lineárisan függetlenek***, ha belőlük a nullvektor csak csupa nulla együtthatóval állítható elő lineáris kombinációként.

$$\vec{0} = \lambda_1.\overrightarrow{a_1} + \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + \lambda_3.\overrightarrow{a_3} + \dots + \lambda_n.\overrightarrow{a_n} \Rightarrow \forall\, \lambda_i = 0 \wedge i \in [1; n]$$

V. Két vektor pontosan akkor lineárisan függő, ha párhuzamos (ekkor a vektorok nagyságának hányadosa – vagy ennek ellentettje – az a szám, amivel megszorozva az egyiket , megkapom a másikat). Ha két vektor nem párhuzamos (a 0° és a 180°-os szögtől különböző szöget zárnak be), akkor lineárisan függetlenek.



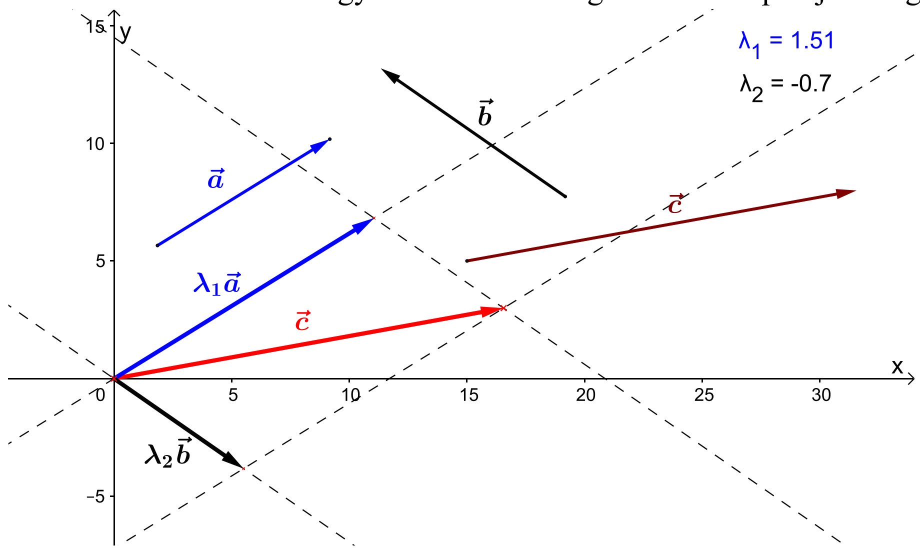
lineárisan függő



lineárisan független

V. Tetszőleges három vektor a síkban mindig lineárisan függő.

- vagy van közöttük legalább két párhuzamos vektor
- vagy pedig grafikusan paralelogrammára kiegészítve meghatározhatjuk a lineáris kombinációt – a pontos lineáris kombinációt csak egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg



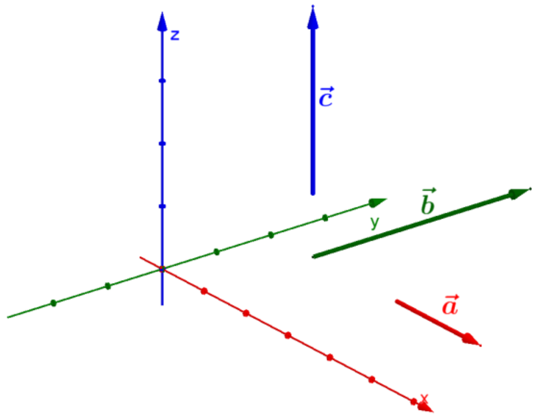
felvesszük mindhárom vektor közös kezdőpontú reprezentánsát (például helyvektorokat – az origóban) kiegészítjük paralelogrammára – a harmadik vektor végpontjában (az a vektor, amelyiket szeretnénk a másik kettő segítségével kifejezni) párhuzamost húzunk mindkét vektorral

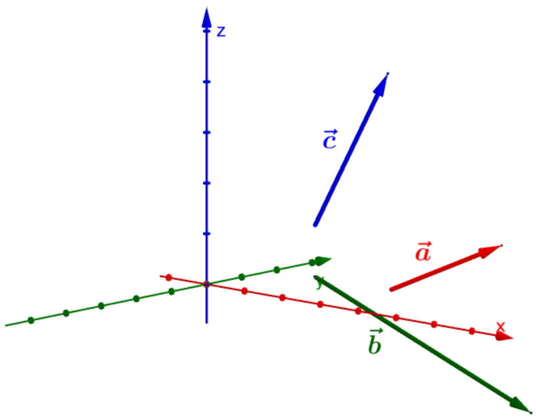
a paralelogramma oldalhosszának és a vele párhuzamos vektor nagyságának az aránya adja a lineáris kombináció együtthatóját – az előjelet viszont nekünk kell kiegészíteni az irány alapján (lásd $\lambda_2.\vec{b}$-nek ellentett az iránya, mint magának a $\vec{b}$ vektornak)

M. A térben maximum három vektor alkothat lineárisan független rendszert. Négy vektor már biztosan lineárisan függő.

A legegyszerűbb példa, ha három egymásra kölcsönösen merőleges vektort választunk: az egyiket az x tengely, a másik az y tengely, a harmadik pedig a z tengely irányában.

Nem is szükséges, hogy kölcsönösen merőlegesek legyenek. Elegendő, ha a harmadik vektor az első két vektor által meghatározott síkkal nullától különböző szöget zár be.





lineárisan függetlenek

példa:

Állapítsuk meg, hogy az alábbi vektorok lineárisan függők-e:

a, $\vec{a}$ (2; 7); $\vec{b}$ (-4; -12)　　　　b, $\vec{c}$ (20; -15); $\vec{d}$ (-8; 6)

ha függők, akkor az egyik a másik számszorosa

a, ? $\exists\lambda \in \mathbb{R}$: $\vec{a} = \lambda.\vec{b}$

$\vec{a} = \lambda.\vec{b}$

(2; 7) = λ.(-4; -12)

$$(2; 7) = (-4.\lambda; -12.\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -4\lambda & \rightarrow \quad -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = \lambda \\ 7 = -12\lambda' & \rightarrow \quad -\frac{7}{12} = \lambda' \end{cases}$$

$\lambda \neq \lambda'$ (két különböző értéket kaptunk) $\Rightarrow$ $\nexists\lambda$ $\Rightarrow$ lineárisan függetlenek

---

b, ? $\exists\lambda \in \mathbb{R}$: $\vec{c} = \lambda.\vec{d}$

$\vec{c} = \lambda.\vec{d}$

(20; -15) = λ.(-8; 6)

$$(20; -15) = (-8.\lambda; 6.\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 20 = -8\lambda & \rightarrow \quad -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} = \lambda \\ -15 = 6\lambda' & \rightarrow \quad -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} = \lambda' \end{cases}$$

$\lambda = \lambda'$ (azonos értékeket kaptunk) $\Rightarrow$ $\exists\lambda$ $\Rightarrow$ lineárisan függők

Állapítsuk meg, hogy az alábbi vektorok lineárisan függők-e:

a, $\vec{a}$ (7; -5); $\vec{e}$ (2; 1); $\vec{f}$ (1; 2)　　　　b, $\vec{b}$ (-3; -2); $\vec{g}$ (1; -1); $\vec{h}$ (-1; -2)

a, $\exists\ \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\vec{a} = \lambda_1.\vec{e} + \lambda_2.\vec{f}$

$\vec{a} = \lambda_1.\vec{e} + \lambda_2.\vec{f} = \lambda_1.(2; 1) + \lambda_2.(1; 2) = (2\lambda_1; 1\lambda_1) + (1\lambda_2; 2\lambda_2) = (2\lambda_1 + \lambda_2; \lambda_1 + 2\lambda_2)$

$$(7; -5) = (2\lambda_1 + \lambda_2; \lambda_1 + 2\lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ -5 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

$7 = 2\lambda_1 + \lambda_2$

$\underline{-5 = \lambda_1 + 2\lambda_2}$　　　　/.(-2)

$7 = 2\lambda_1 + \lambda_2$

$\underline{10 = -2\lambda_1 - 4\lambda_2}$　　　　/I. + II.

$17 = -3\lambda_2$　　　　/:(-3)

$-\frac{17}{3} = \lambda_2$

$-5 = \lambda_1 + 2.\left(-\frac{17}{3}\right)$　　　　$/+\frac{34}{3}$

$\frac{19}{3} = \lambda_1$

$\vec{a} = \frac{19}{3}.\vec{e} - \frac{17}{3}.\vec{f} \;\Rightarrow$ lineárisan függők

---

b, $\exists\ \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\vec{b} = \lambda_1.\vec{g} + \lambda_2.\vec{h}$

$\vec{b} = \lambda_1.\vec{g} + \lambda_2.\vec{h} = \lambda_1.(1; -1) + \lambda_2.(-1; -2) = (1\lambda_1; -1\lambda_1) + (-1\lambda_2; -2\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2; -\lambda_1 - 2\lambda_2)$

$(-3; -2) = (\lambda_1 - \lambda_2; -\lambda_1 - 2\lambda_2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -3 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ -2 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases}$

$-3 = \lambda_1 - \lambda_2$

$\underline{-2 = -\lambda_1 - 2\lambda_2}$ /I. + II.

$-5 = -3\lambda_2$ /:(-3)

$\frac{5}{3} = \lambda_2$

$-3 = \lambda_1 - \frac{5}{3}$ /$+\frac{5}{3}$

$-\frac{4}{3} = \lambda_1$

$\vec{b} = -\frac{4}{3}.\vec{g} + \frac{5}{3}.\vec{h} \;\Rightarrow$ lineárisan függők