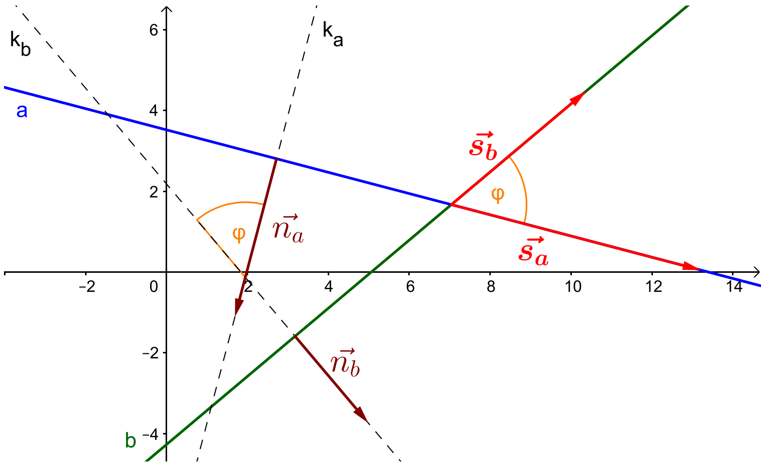
Egyenesek hajlásszöge
(Uhol priamok)

Alapvetően az egyenesek hajlásszögeszöge metsző egyenesekre van értelmezve. Ezt általában kibővítjük az egyenesek egyéb köcsönös helyzeteire is: azonos és párhuzamos egyenesekére, melyek ezen kibővítésben 0 fokos szöget fognak bezárni (mivel síkban dolgozunk, a negyedik lehetőség – kitérő egyenesek – nem jöhet szóba). Vagyis az egyenesek hajlásszöge fogalmának kiterjesztése után az egyenesek szöge a következő zárt intervallumba esik:

$$\varphi = \in \langle 0°; 90° \rangle$$

Az egyenesek koordinátageometriában egyenletekkel adottak. Mi három különböző típusával ismerkedtünk meg (paraméteres, általános és iránytényezős), de léteznek továbbiak is, sőt lehet olyan alakú egyenlet is, melynek nincs neve. Ebben az esetben előbb úgy alakítjuk az adott egyenletet, hogy ki lehessen olvasni belőle az egyenes valamely vektorának koordinátáit (paraméteresből → irányvektort; általánosból → normálovvektort), vagy az iránytényezőjét (s az iránytényezőből az irányvektort).



Koordinátageometriában a szöget természetesen vektorok segítségével számoljuk. Az egyenesek hajlásszöge egyezik (amennyiben a vektorok megfelelő irányúak – ami az egyenletekből kapott vektoroknál nem kell, hogy teljesüljön) az irányvektoraik szögével, továbbá normálvektoraik szögével is.

$$ab\sphericalangle \cong (\vec{s_a}\,\vec{s_b}\sphericalangle \vee 180° - \vec{s_a}\,\vec{s_b}\sphericalangle) \cong (\vec{n_a}\,\vec{n_b}\sphericalangle \vee 180° - \vec{n_a}\,\vec{n_b}\sphericalangle)$$

Tudjuk, hogy a vektorok szöge lehet tompaszög is, sőt akár egyenesszög (180°). Ezért, ha 90°-nál nagyobb szöget kapunk, akkor egyeneseink hajlásszöge a kapott szögnek a kiegészítő szöge lesz (180° – φ).

Hogy egyszerűsíthetnénk, hogy ne kelljen a kiegészítő szöget számolnunk, vagyis rögtön a valódi szöget kapjuk meg?
A koszinusz függvény tulajdonságaiból tudjuk (hisz a vektorok szögére vonatkozó képlet a keresett szög koszinusz értékét adja vissza), hogy a tompaszögek esetében ez negatív szám, míg hegyesszögek koszinusza pozitív érték. Ha átalakítjuk a képletben a számlálót (a vektorok skaláris szorzatát) úgy, hogy mindig nemnegatív számot kapjunk, akkor belőle hegyesszög adódik (esetleg derékszög vagy nullszög).

M. A képlet nevezőjében a vektorok nagyságainak szorzata szerepel, ami soha nem lesz negatív. Vagyis az eredmény előjele csakis a számláló előjelétől függ.

Van egy függvényünk, melyet az első évfolyamból ismerünk, ami bármilyen számból nemnegatív értéket csinál. Ez az abszolút érték. Vagyis az átalakított összefüggés így néz ki:

T. $$\cos\varphi = \frac{|\vec{s_a}\cdot\vec{s_b}|}{|\vec{s_a}|\cdot|\vec{s_b}|} = \frac{|\vec{n_a}\cdot\vec{n_b}|}{|\vec{n_a}|\cdot|\vec{n_b}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{|s_{a_1}\cdot s_{b_1} + s_{a_2}\cdot s_{b_2}|}{\sqrt{s_{a_1}^2 + s_{a_2}^2}\cdot\sqrt{s_{b_1}^2 + s_{b_2}^2}} = \frac{|n_{a_1}\cdot n_{b_1} + n_{a_2}\cdot n_{b_2}|}{\sqrt{n_{a_1}^2 + n_{a_2}^2}\cdot\sqrt{n_{b_1}^2 + n_{b_2}^2}}$$

példa:

Számítsuk ki az adott egyenesesk hajlásszögét:

a, a: $3x + 2y - 4 = 0$ b: $4x - 3y + 1 = 0$

b, c: $x = 7 - 7t$
$y = 2 + 3t$

d: $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$

c, e: $x = 3 + t$
$y = -1 - 4t$

f: $2x + 8 = 0$

d, g: $2x = 5 + 4y$

h: $y = -\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$

a, $\overrightarrow{n_a} = (3; 2)$; $\overrightarrow{n_b} = (4; -3)$

$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_a}.\overrightarrow{n_b}|}{|\overrightarrow{n_a}|.|\overrightarrow{n_b}|} = \frac{|n_{a_1}.n_{b_1}+n_{a_2}.n_{b_2}|}{\sqrt{n_{a_1}^2+n_{a_2}^2}.\sqrt{n_{b_1}^2+n_{b_2}^2}} = \frac{|3.4+2.(-3)|}{\sqrt{3^2+2^2}.\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|12-6|}{\sqrt{9+4}.\sqrt{16+9}} = \frac{|6|}{5\sqrt{13}} = \frac{6}{5\sqrt{13}} = 0{,}332\ 8$

$\varphi = \cos^{-1} 0{,}332\ 8 = 70°33'36''$

---

b, $\overrightarrow{s_c} = (-7; 3)$; $k_d = \frac{4}{5} \to \overrightarrow{s_d} = (5; 4)$

$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{s_c}.\overrightarrow{s_d}|}{|\overrightarrow{s_c}|.|\overrightarrow{s_d}|} = \frac{|s_{c_1}.s_{d_1}+s_{c_2}.s_{d_2}|}{\sqrt{s_{c_1}^2+s_{c_2}^2}.\sqrt{s_{d_1}^2+s_{d_2}^2}} = \frac{|-7.5+3.4|}{\sqrt{(-7)^2+3^2}.\sqrt{5^2+4^2}} = \frac{|-35+12|}{\sqrt{49+9}.\sqrt{25+16}} = \frac{|-23|}{\sqrt{58.41}} = \frac{23}{\sqrt{2\ 378}} = 0{,}471\ 7$

$\varphi = \cos^{-1} 0{,}471\ 7 = 61°51'30''$

---

c, $\overrightarrow{s_e} = (1; -4)$; $\overrightarrow{n_f} = (2; 0) \to \overrightarrow{s_f} = (0; 2) \sim (0; 1)$

$\cos\varphi = \frac{|1.0+(-4).1|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}.\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|0-4|}{\sqrt{1+16}.\sqrt{0+1}} = \frac{|-4|}{\sqrt{17}.\sqrt{1}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = 0{,}970\ 1$

$\varphi = \cos^{-1} 0{,}970\ 1 = 14°2'10''$

---

b, $2x = 5 + 4y \to 2x - 4y - 5 = 0$

$\overrightarrow{n_g} = (2; -4) \to \overrightarrow{s_g} = (4; 2) \sim (2; 1)$; $k_h = -\frac{5}{3} \to \overrightarrow{s_h} = (3; -5)$

$\cos\varphi = \frac{|2.3+1.(-5)|}{\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{3^2+(-5)^2}} = \frac{|6-5|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{9+25}} = \frac{|1|}{\sqrt{5}.\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{170}} = 0{,}076\ 7$

$\varphi = \cos^{-1} 0{,}076\ 7 = 85°36'5''$