Az egyenes és a kör
(Priamka a kružnica)

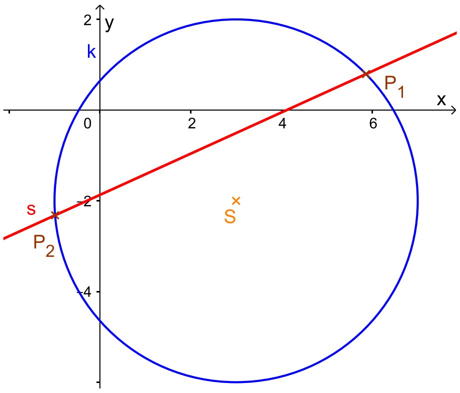
egyenletrendszert kell megoldanunk

az egyenes egyenlete (lineáris) + a kör egyenlete (másodfokú)

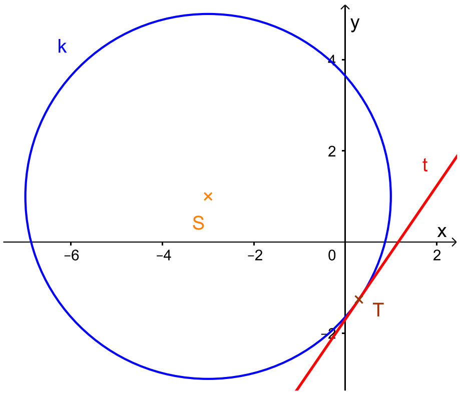
az összevont egyenlet → másodfokú

az egyenletrendszer megoldásainak száma = az egyenes és a kör közös pontjainak száma

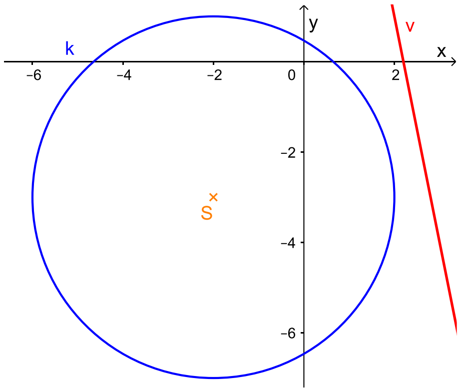
a, két megoldás ⇒ két közös pont ($p \cap k = \{P_1; P_2\}$) ⇒ szelő (sečnica)
b, egy megoldás ⇒ egy közös pont ($p \cap k = \{T\}$) ⇒ érintő (dotyčnica)
c, nincs megoldása ⇒ nincs közös pont ($p \cap k = \emptyset$) ⇒ külső egyenes (nesečnica/vonkajšia priamka)



szelő



érintő



külső egyenes

ha adott a kör és az érintési pont:

k: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$; $T(x_0; y_0)$

akkor az adott pontbeli érintő egyenlete:

t: $(x_0 - u).(x - u) + (y_0 - v).(y - v) = r^2$

példa:

Határozzuk meg a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit amennyiben létezik:

a, k: $x^2 + y^2 = 13$
a: $x = -2 + t$
$y = 3 - t$

b, l: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
b: $2x + y - 2 = 0$

c, m: $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 34$
c: $y = \frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$

d, n: $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 21 = 0$
d: $x = 2 + t$
$y = -2 + 8t$

a, $(-2 + t)^2 + (3 - t)^2 = 13$

a behelyettesítés után négyzetre emeljük

$4 - 4t + t^2 + 9 - 6t + t^2 = 13$

$2t^2 - 10t + 13 = 13 \qquad /-13$

$2t^2 - 10t = 0$

$2t(t - 5) = 0$

$t_1 = 0 \qquad t - 5 = 0$

$t_2 = 5$

$x_1 = -2 + 0 = -2 \qquad x_2 = -2 + 5 = 3$

$y_1 = 3 - 0 = 3 \qquad y_2 = 3 - 5 = -2$

$P_1 = (-2; 3)$; $P_2 = (3; -2)$

---

b, $y = 2 - 2x$

$(x - 2)^2 + (2 - 2x - 3)^2 = 25$

$(x - 2)^2 + (-1 - 2x)^2 = 25$

$x^2 - 4x + 4 + 1 + 4x + 4x^2 = 25$

$5x^2 + 5 = 25 \qquad /-5$

$5x^2 = 20 \qquad /:5$

$x^2 = 4 \qquad /\sqrt{\ }$

$|x| = 2$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$

$y_1 = 2 – 2.(-2) = 2 + 4 = 6$

$y_2 = 2 – 2.2 = 2 – 4 = -2$

$P_1 =(-2; 6)$; $P_2 =(2; -2)$

---

c, $(x – 5)^2 + \left(\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} + 2\right)^2 = 34$

$(x – 5)^2 + \left(\frac{3}{5}x + \frac{19}{5}\right)^2 = 34$

$x^2 – 10x + 25 + \frac{9}{25}x^2 + \frac{114}{25}x + \frac{361}{25} = 34 \qquad /.25$

$25x^2 – 250x + 625 + 9x^2 + 114x + 361 = 850$

$34x^2 – 136x + 986 = 850 \qquad /-850$

$34x^2 – 136x + 136 = 0 \qquad /:34$

$x^2 – 4x + 4 = 0$

$(x – 2)^2 = 0 \qquad /\sqrt{\ }$

$|x – 2| = 0$

$x – 2 = 0$

$x = 2$

$y = \frac{3}{5}.2 + \frac{9}{5} = \frac{6}{5} + \frac{9}{5} = 3$

$T(2; 3)$

---

d, $(2 + t)^2 + (-2 + 8t)^2 + 8(2 + t) – 10(-2 + 8t) + 21 = 0$

$4 + 4t + t^2 + 4 – 32t + 64t^2 + 16 + 8t + 20 – 80t + 21 = 0$

$65t^2 – 100t + 65 = 0 \qquad /:5$

$13t^2 – 20t + 13 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{20\pm\sqrt{(-20)^2-4.13.13}}{2.13} = \frac{20\pm\sqrt{400-676}}{26} = \frac{20\pm\sqrt{-276}}{26}$

nincs megoldása ⇒ külső egyenes

Számítsuk ki az előző feladat szelői által keletkezett húrok hosszát:

a, $|P_1P_2| = \sqrt{\left(3-(-2)\right)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} \doteq 7{,}071\ 1$

---

b, $|P_1P_2| = \sqrt{\left(2-(-2)\right)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} \doteq 8{,}944\ 3$

Határozzuk meg a kör érintőjének egyenletét a T pontban: $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 10$; $T(-5; y_T > 0)$

először meghatározzuk az érintési pont hiányzó koordinátáját

$(-5 + 4)^2 + (y + 1)^2 = 10$

$(-1)^2 + (y + 1)^2 = 10$

$1 + (y + 1)^2 = 10 \qquad /-1$

$(y + 1)^2 = 9 \qquad /\sqrt{\ }$

$|y + 1| = 3$

$y + 1 = 3 \qquad y + 1 = -3$

$y_1 = 2 \qquad y_2 = -4$

$T(-5; 2)$

a kör egyenletéből középpontja: $S(-4; -1)$

$TS \perp t \Rightarrow \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{n_t} = S – T = (1; -3)$

t: $1.x – 3.y + c = 0$

$1.(-5) – 3.2 + c = 0$

$c = 11$

$t: x - 3y + 11 = 0$

Határozzuk meg a q paraméter értékét úgy, hogy a $qx - 4y - 20 = 0$ egyenletű egyenes érintője legyen az $x^2 + y^2 = 20$ egyenletű körnek.

kifejezzük az y-t

$qx - 4y - 20 = 0$

$4y = 20 - qx$

$\frac{20-qx}{4} = y$

behelyettesítjük a kör egyenletébe

$x^2 + \left(\frac{20-qx}{4}\right)^2 = 20$

négyzetre emeljük

$x^2 + \frac{400-40qx+q^2x^2}{16} = 20 \qquad /.16$

eltüntetjük a törtet

$16x^2 + 400 - 40qx + q^2x^2 = 320$

redukáljuk az egyenletet majd kiemelünk x^2-et

$x^2(16 + q^2) - 40qx + 80 = 0$

ez egy másodfokú egyenlet x ismeretlennel és q paraméterrel

$a = 16 + q^2 \qquad b = -40q \qquad c = 80$

a megoldások száma a D-től függ: egy megoldás $\Leftrightarrow$ D = 0

$D = b^2 - 4ac = (-40q)^2 - 4.(16 + q^2).80 = 1\,600q^2 - 5\,120 - 320q^2 = 1\,280q^2 - 5\,120$

$1\,280q^2 - 5\,120 = 0$

$1\,280q^2 = 5\,120$

$q^2 = \frac{5\,120}{1\,280} = 4$

$|q| = 2$

$q_1 = -2 \qquad q_2 = 2$

$t_1: -2x - 4y - 20 = 0 \qquad t_2: 2x - 4y - 20 = 0$

Írjuk fel a kör azon érintőjének egyenletét, mely párhuzamos az adott egyenessel:

a, $k: 4x^2 + 4y^2 - 24x + 16y - 117 = 0$ b, $l: x^2 + (y + 4)^2 = 0$

$a: 12x - 5y - 110 = 0$ $b: y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

a, 1. módszer (csak a körnél érvényes)

meghatározzuk a kör középpontját – középponti alakra hozzuk

$4x^2 - 24x + 4y^2 + 16y = 117$

$4(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 4y) = 117$

$4(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = 117 + 4.9 + 4.4$

$4(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 169$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{169}{4}$

S(3; -2)

felírjuk a kör középpontjához illeszkedő, az a egyenesre merőleges m egyenes egyenletét

$\overrightarrow{n_a}(12; -5) \perp \overrightarrow{n_m} \Rightarrow \overrightarrow{n_m}(5; 12)$

$m: 5x + 12y + c = 0$

$5.3 + 12(-2) + c = 0$

$15 - 24 + c = 0$

$c = 9$

$m: 5x + 12y + 9 = 0$

meghatározzuk a merőleges egyenes és a kör közös pontjait – az érintési pontokat

$5x = -12y - 9$

$x = \frac{-12y-9}{5}$

$$4\left(\frac{-12y-9}{5}\right)^2 + 4y^2 - 24.\frac{-12y-9}{5} + 16y - 117 = 0$$

$$4.\frac{144y^2+216y+81}{25} + 4y^2 - \frac{-288y-216}{5} + 16y - 117 = 0 \qquad /.25$$

$$576y^2 + 864y + 324 + 100y^2 + 1\,440y + 1\,080 + 400y - 2\,925 = 0$$

$$676y^2 + 2\,704y - 1\,521 = 0 \qquad /:169$$

$$4y^2 + 16y - 9 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-16\pm\sqrt{16^2-4.4.(-9)}}{2.4} = \frac{-16\pm\sqrt{256+144}}{8} = \frac{-16\pm 20}{8} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} = 0{,}5 \\ \searrow -\frac{9}{2} = -4{,}5 \end{matrix}$$

$$x_1 = \frac{-12.0{,}5-9}{5} = -3$$

$$x_2 = \frac{-12.(-4{,}5)-9}{5} = 9$$

$T_1(-3; 0{,}5)$; $T_2(9; -4{,}5)$

meghatározzuk az érintési pontokhoz illeszkedő párhuzamos érintők egyenleteit

t: $12x - 5y + c = 0$

$12.(-3) - 5.0{,}5 + c = 0$

$-36 - 2{,}5 + c = 0$

$c = 38{,}5$

$12.9 - 5.(-4{,}5) + c = 0$

$108 + 22{,}5 + c = 0$

$c = -130{,}5$

t_1: $24x - 10y + 77 = 0$ $\qquad$ t_2: $24x - 10y - 261 = 0$

---

b, 2. módszer

az egyenes adott iránytényezős egyenletével

a párhuzamos érintőnek azonos iránytényezővel kell rendelkeznie – az egyenlet csak a konstans értékében különbözik

t: $y = \frac{3}{4}x + q$

behelyettesítünk a kör egyenletébe

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x + q + 4\right)^2 = 100$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 + q^2 + 16 + \frac{3}{2}qx + 6x + 8q = 100$$

$$\frac{25}{16}x^2 + x\left(\frac{3}{2}q + 6\right) + q^2 + 8q - 84 = 0$$

$a = \frac{25}{16}$ $\qquad$ $b = \frac{3}{2}q + 6$ $\qquad$ $c = q^2 + 8q - 84$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás ⇔ D = 0

$$D = b^2 - 4ac = \left(\frac{3}{2}q + 6\right)^2 - 4.\frac{25}{16}.(q^2 + 8q - 84) = \frac{9}{4}q^2 + 18q + 36 - \frac{25}{4}q^2 - 50q + 525 =$$

$$= -4q^2 - 32q + 561$$

$$-4q^2 - 32q + 561 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{32\pm\sqrt{(-32)^2-4.(-4).561}}{2.(-4)} = \frac{32\pm\sqrt{1\,024+8\,976}}{-8} = \frac{32\pm 100}{-8} = \begin{matrix} \nearrow -\frac{33}{2} = -16{,}5 \\ \searrow \frac{17}{2} = 8{,}5 \end{matrix}$$

t_1: $y = \frac{3}{4}x - \frac{33}{2}$ $\qquad$ t_2: $y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{2}$