

Egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenségek (Lineárne nerovnice s jednou neznámou)

D. Az *egyenlőtlenségnek* két oldala van (az *egyenlőtlenség bal és jobb oldala*) közöttük pedig az egyik a négy lehetséges jelből „<”, „≤”, „>”, „≥”, miközben legalább az egyik oldalnak kifejezést kell tartalmaznia (*vagyis legalább egy ismeretlent*).

egy szám az egyenlőtlenség megoldása/gyöke (číslo je riešením/koreňom nerovnice) – a számot az eredeti egyenlőtlenségbe behelyettesítve érvényes az állítás

megoldani az egyenlőtlenséget (riešiť nerovnicu) – megkeresni az egyenlőtlenség összes megoldását

az egyenlőtlenség megoldáshalmaza (množina riešení/obor pravdivosti nerovnice) – az egyenlőtlenség megoldásait tartalmazó halmaz

az egyenlőtlenség ekvivalens átalakítása (ekvivalentná úprava nerovnice) – az egyenlőtlenségnek az átalakítás előtt és után pontosan ugyanaz a megoldáshalmaza → nem adódik hozzá és nem tűnik el megoldás

ekvivalens átalakítások:

- az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadhatjuk ugyanazt a számot vagy kifejezést → tagok átvitele az egyenlőtlenség egyik oldaláról a másikra

$$\begin{array}{ll} 3x - 5 > 7 + 4x & /+ 5 \\ 3x > 12 + 4x & /- 4x \\ -x > 12 & \end{array}$$

- az egyenlőtlenség mindkét oldalát *megszorozhatjuk* ugyanazzal a **nullától különböző** számmal vagy kifejezéssel → törtek és együtthatók eltüntetése

$$\begin{array}{ll} \frac{2x+6}{6} \leq x-5 & /.6 \\ 2x+6 \leq 6x-30 & \\ \dots & \\ 4x < 12 & /:4 \\ x < 3 & \end{array}$$

Fejezzük be az első ekvivalens átalakítás egyenlőtlenségének megoldását:

$$\begin{array}{ll} -x > 12 & /.(-1) \\ x > -12 & \end{array}$$

Most ugyanezt a tagok átvitelével oldjuk meg:

$$\begin{array}{ll} -x > 12 & /+x \\ 0 > 12+x & /-12 \\ -12 > x & \text{illetve felcserélve az oldalakat } x < -12 \end{array}$$

Először azt kaptuk, hogy az x nagyobb mint -12 ; másodszor pedig, hogy az x kisebb mint -12 . Mégis melyik a helyes eredmény? És miért kaptunk ellenkező eredményeket?

Természetesen a második eredmény a helyes. De hogy történhetett, hogy rossz eredmény jött ki, és hogy kerülhetjük ezt el? A második ekvivalens átalakítást (beszorzást) ki kell egészítenünk. Vagyis a teljes alakja így néz ki:

- az egyenlőtlenség mindkét oldalát *megszorozhatjuk* ugyanazzal a **nullától különböző** számmal vagy kifejezéssel, de ha negatív számmal vagy kifejezéssel szorzunk, akkor megfordul az egyenlőtlenség iránya (meg kell fordítani a jelet)

M. Nem szükséges külön említeni a „*kivonni*” és az „*elosztani*” műveleteket:

a kivonás helyettesíthető az ellentett szám vagy kifejezés hozzáadásával: $/- 4x \equiv /+ (-4x)$

az osztás helyettesíthető a szám vagy a kifejezés reciprokával történő beszorzással: $/:7 \equiv /.\frac{1}{7}$

M. Ezen ekvivalens átalakítások a valós számok tulajdonságain alapulnak.

Még megengedett művelet az egyenlőtlenség oldalainak felcserélése együtt a jel megfordításával (viszont teljesen mindegy, hogy a megoldásnál az utolsó sorban az ismeretlen a baloldalon vagy a szám pedig a jobbon vagy fordítva). De a jobb megértés érdekében a kapott eredményt mindig az ismeretlen szemszögéből olvassátok el.

$-12 > x$ ne olvassátok, hogy: „ -12 nagyobb mint az x ” hanem „ x kisebb mint -12 ”

ellenőrzés/próba (skúška správnosti) – a megoldásokból (az intervallumból/intervallumokból) mindig az egyenlőtlenség eredeti alakjába helyettesítünk be egy tetszőlegesen kiválasztott számot → ha igaz az állítás, akkor az intervallum/intervallumok a megoldása, egyébként nem.

M. Tetszőleges egyenlőtlenség-típusnál a teljes megoldás mindig tartalmazza az ellenőrzést (próbát) is.

Ha kapunk egy egyismeretlenes egyenlőtlenséget, mely zárójeleket, törtkifejezéseket és semmi más függvényt nem tartalmaz, első ránézésre nem megmondható, hogy milyen egyenlőtlenséggel állunk szemben (fokszámát tekintve).

D. Az **egyenlőtlenség lineáris**, ha olyan alakra hozható (törtek eltüntetésével, zárójelek felbontásával, tagok rendezésével és összevonásával), hogy az egyenlőtlenség egyik oldalán lineáris függvény szerepeljen a másikon pedig nulla.

$$a \cdot x + b < 0 \quad \text{vagy} \quad 0 < a \cdot x + b$$

Ekkor egyenlőtlenségünk megoldása:

$$x < -\frac{b}{a}, \quad \text{ha } a > 0$$

$$x > -\frac{b}{a}, \quad \text{ha } a < 0$$

Az egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenség megoldásai számát tekintve háromféle lehet:

- a lineáris egyenlőtlenségnek végtelen sok megoldása van – egy intervallum, melynek egyik határa $-\infty$ vagy ∞ (a példák túlnyomó többsége)
- a lineáris egyenlőtlenségnek nincs megoldása – eredményként egy **hamis állítás** kapunk (két szám összehasonlítását)
- a lineáris egyenlőtlenségnek véges számú megoldása van – csak akkor lehet, ha egyenlőtlenségünket egy speciális halmazon kell megoldanunk (pl. a természetes számok halmazán)

Intervallumok:

Egy intervallum lehet

nyílt – az eredményben szigorúan nagyobb/kisebb szerepel ($>$ vagy $<$)

a határ (szám) már nem tartozik bele az intervallumba: a legkisebb (első)/legnagyobb (utolsó) megoldás nem meghatározható

az intervallum a $-\infty$ -nél és a ∞ -nél mindig nyílt (a végtelen nem egy szám – csak egy absztrakt fogalom)

zárt – az eredményben szigorúan nagyobb vagy egyenlő/ kisebb vagy egyenlő szerepel ($\geq$ vagy $\leq$)

itt ismert a pontos határ: a legkisebb (első)/legnagyobb (utolsó) megoldás

eredmény	jelölésben	grafikusan
$x > 5$	$x \in (5; \infty)$	
$x \geq -3$	$x \in [-3; \infty)$	
$x < 6$	$x \in (-\infty; 6)$	
$x \leq 10$	$x \in (-\infty; 10]$	

példa:

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket:

a, $5x - 7 \leq 3$

d, $3(x + 2) > 5$

b, $3x + 5 > 4x - 9$

e, $4x + 1 \geq 2(2x - 3)$

c, $2(x - 1) \leq 4x + 6$

f, $3(2x + 4) < 2(3x + 2)$

a, $5x - 7 \leq 3$

$/+7$

$5x \leq 10$

$/:5$

$x \leq 2$

$x \in (-\infty; 2]$

$0 \in (-\infty; 2)$

B: $5 \cdot 0 - 7 = 0 - 7 = -7$

J: 3

$-7 < 3$

b, $3x + 5 > 4x - 9$

$/+9 - 3x$

$14 > x$

$x \in (-\infty; 14)$ + ellenőrzés

c, $2(x - 1) \leq 4x + 6$

$2x - 2 \leq 4x + 6$

$/-2x - 6$

$-8 \leq 2x$

$/:2$

$-4 \leq x$

$x \in [-4; \infty)$ + ellenőrzés

d, $3(x + 2) > 5$

$3x + 6 > 5$

$/-6$

$3x > -1$

$/:3$

$x > -\frac{1}{3}$

$x \in \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ + ellenőrzés

e, $4x + 1 \geq 2(2x - 3)$

$4x + 1 \geq 4x - 6$

$/-4x$

$1 \geq -6$

$x \in \mathbb{R}$ + ellenőrzés

f, $3(2x + 4) < 2(3x + 2)$

$6x + 12 < 6x + 6$

$/-6x$

$12 < 6$

nincs megoldása

Az adott egyenlőtlenségeket oldjuk meg az adott intervallumon:

a, $7x + 5 \leq 3(5 + x); x \in (-3; \infty)$

b, $\frac{4x+2}{5} - 2x > x + \frac{x-1}{2}; x \in (3; \infty)$

a, $7x + 5 \leq 3(5 + x)$

$7x + 5 \leq 15 + 3x$

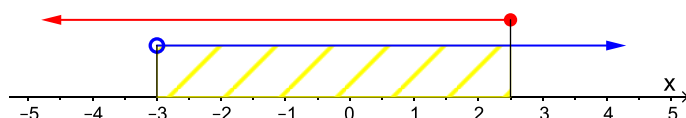
$/-5 - 3x$

$4x \leq 10$

$/:4$

$x \leq 2,5$

az adott intervallum és az eredmény metszetét grafikusan határozzuk meg

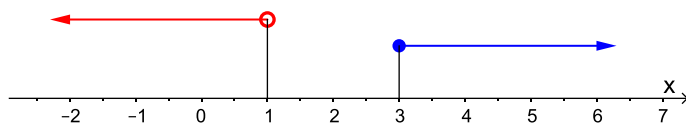


$x \in (-3; 2,5]$ + ellenőrzés

b, $\frac{4x+2}{3} - x > x + \frac{x-1}{2}$

$/:6$

$$\begin{aligned}
2(4x + 2) - 6x &> 6x + 3(x - 1) \\
8x + 4 - 6x &> 6x + 3x - 3 \\
2x + 4 &> 9x - 3 & \quad /-2x + 3 \\
7 &> 7x & \quad /:1 \\
1 &> x
\end{aligned}$$



nincs megoldása

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket:

$$a, \frac{2x+3}{x-1} > 1$$

$$b, \frac{x-5}{2x+3} + 1 \geq -1$$

M. Egy törtkifejezést tartalmazó egyenlőtlenséget csak úgy nem szorozhatunk meg egy kifejezéssel (a tört eltüntetésének érdekében). A kifejezések zöme (léteznek kivételek is) felvehet pozitív és negatív értéket is, annak függvényében, hogy milyen számot helyettesítünk be az ismeretlen helyére. Ezért megoldásunkat két részre (ágra) kell osztani – egyszer azt feltételezzük, hogy a kifejezés értéke pozitív (ebből az egyenlőtlenségből kiszámítjuk, hogy mely számoknál áll ez fenn – kapunk egy intervallumot mint előfeltételt); megoldjuk az egyenlőtlenséget. Az eredmény összevetjük az előfeltétellel (ezek metszete a teljes megoldás része). Hasonlóan járunk el a nevezőbeli kifejezés negatív értéke mellett is. Viszont a tört eltüntésekor (mivel negatív kifejezéssel szorzunk) megfordítjuk az egyenlőtlenség irányát. Végül a két részmegoldás uniója lesz a teljes megoldás.

M. Nem mindig van metszet mindkét ágon.

Ne feledkezzünk meg a feltételről sem!

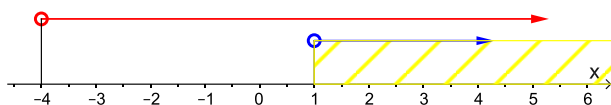
$$a, \frac{2x+3}{x-1} > 1 \quad x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$I. x-1 > 0 \\ x > 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{x-1} &> 1 & \quad /.(x-1) \\
2x+3 &> x-1 & \quad /-x-3 \\
x &> -4
\end{aligned}$$

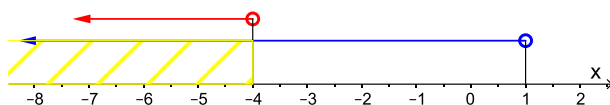
$$II. x-1 < 0 \\ x < 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{x-1} &> 1 & \quad /.(x-1) \\
2x+3 &< x-1 & \quad /-x-3 \\
x &< -4
\end{aligned}$$



$$x \in (1; \infty)$$

$$x \in (-\infty; -4) \cup (1; \infty) + \text{ellenőrzés}$$



$$x \in (-\infty; -4)$$

$$b, \frac{x-5}{2x+3} + 1 \geq -1$$

M. A másik megoldási módszer eltekint a törtkifejezések eltüntetésétől. Az egyenlőtlenséget redukálni kell (az egyik oldalon csak 0 maradhat), miközben a másik oldalon mindent egy törtbe kell összevonni. Ezek után abból indulunk ki, hogy egy hányados akkor:

- pozitív, ha azonos előjelű számokat (kifejezéseket) osztunk egymással
- negatív, ha ellentett előjelű számokat (kifejezéseket) osztunk egymással
- ha egyenlőtlenségünkben megengedett az egyenlő is, akkor a számlálónál jelenik ez meg az egyenlőtlenség-rendszerben

$$\begin{aligned}
\frac{x-5}{2x+3} + 1 &\geq -1 & \quad /+1 \\
\frac{x-5}{2x+3} + 2 &\geq 0 \\
\frac{x-5}{2x+3} + \frac{2 \cdot (2x+3)}{2x+3} &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\frac{x-5+4x+6}{2x+3} \geq 0$$

$$\frac{5x+1}{2x+3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(5x+1 \geq 0 \wedge 2x+3 > 0) \vee (5x+1 \leq 0 \wedge 2x+3 < 0)$$

$$5x+1 \geq 0 \quad /-1$$

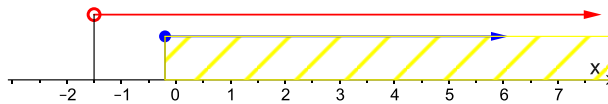
$$5x \geq -1 \quad /:5$$

$$x \geq -\frac{1}{5}$$

$$2x+3 > 0 \quad /-3$$

$$2x > -3 \quad /:2$$

$$x > -\frac{3}{2}$$



$$x \in \left[-\frac{1}{5}; \infty\right)$$

$$5x+1 \leq 0 \quad /-1$$

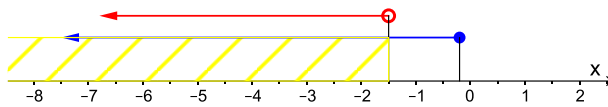
$$5x \leq -1 \quad /:5$$

$$x \leq -\frac{1}{5}$$

$$2x+3 < 0 \quad /-3$$

$$2x < -3 \quad /:2$$

$$x < -\frac{3}{2}$$



$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{5}; \infty\right) + \text{ellenőrzés}$$

Az adott egyenlőtlenségeket oldjátok meg az $\mathbb{R}$ halmazon, és rajzoljátok fel valamennyi megoldásuk P halmazát:

a, $2x - 3 \leq 1$	b, $-x + 18 > x + 16$	c, $3x + 11 < x + 2(x - 3)$
d, $4x + 3 \geq 12(6 - x)$	e, $-23x < 3(8 + 2x)$	f, $5(x - 2) + x \geq 11 - 3(x + 1)$

Az adott egyenlőtlenségeket oldjátok meg az $\mathbb{R}$ halmazon:

a, $\frac{2}{5}x - 3 < 5x - 11$	b, $\frac{2x}{3} - 5 > -6$	c, $x + 2 \leq -4 - \frac{2}{3}x$
d, $10x + \frac{5}{2} \geq 3(x - 1) + \frac{3x}{4}$	e, $\frac{2x+1}{3} + x < x + \frac{3x+2}{6}$	f, $\frac{12x-1}{4} > x + \frac{1}{6}$

Az adott egyenlőtlenségeket oldjátok meg az $\mathbb{N}$ halmazon:

a, $3x - 2 < 2(0,1x + 3)$	b, $x < -x + 2,4\frac{x+1}{6}$
c, $4x - \frac{3x+1}{4} \geq 18$	d, $0,33x + 2(0,1x - 3,6) > 0$

Az adott egyenlőtlenségeket oldjátok meg az $\mathbb{R}$ halmazon:

a, $\frac{x-1}{x+1} > 1$	b, $\frac{6x+4}{2x-1} + 1 > -13$	c, $\frac{11x+2}{12x+3} - 11 > 0$
--------------------------	----------------------------------	-----------------------------------