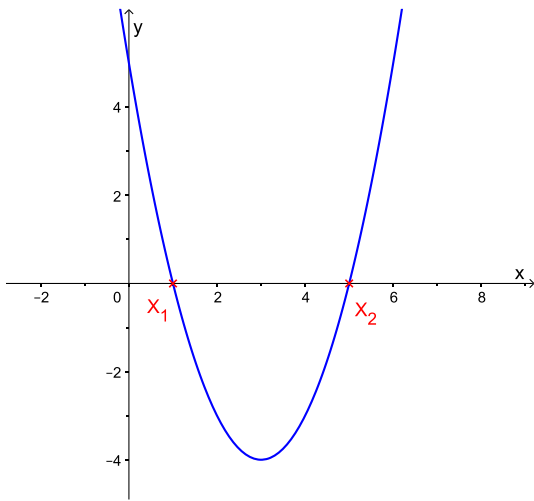


Kvadratické rovnice

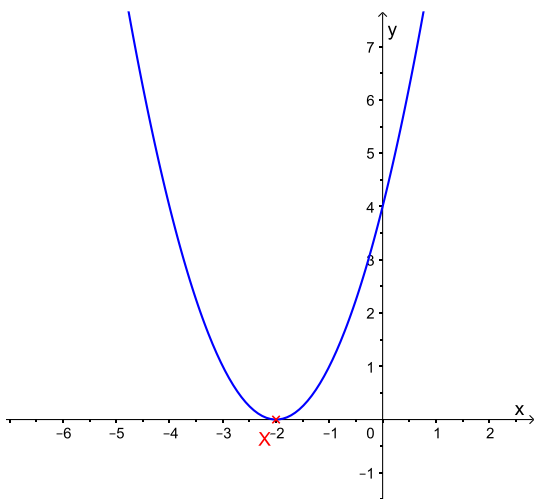
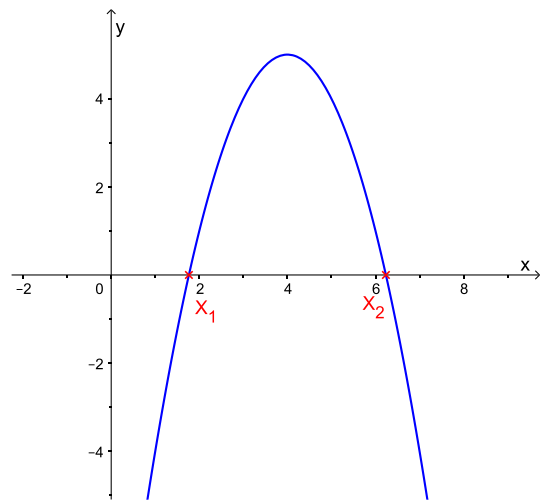
D. Rovnica je *kvadratická*, ak ju môžeme upraviť na taký tvar (odstránením zlomkov, zátvoriek, prenášaním a zlúčením členov) aby na jednej strane bola kvadratická funkcia a na druhej číslo 0.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \text{alebo} \quad 0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

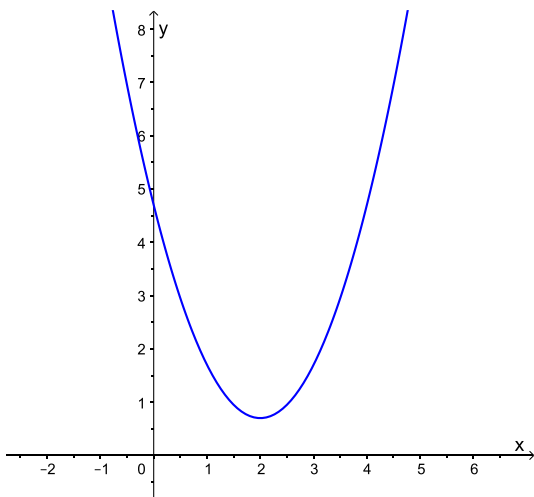
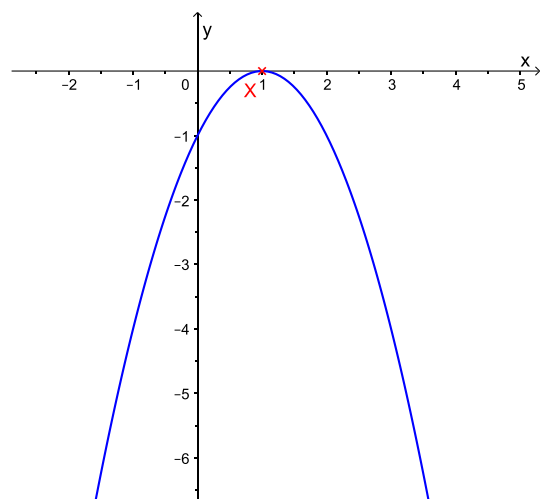
Riešenie kvadratickej rovnice je vlastne hľadanie spoločných bodov grafu kvadratickej funkcie (paraboly) s x -ovou osou. Tá parabola môže mať rôzne polohy:



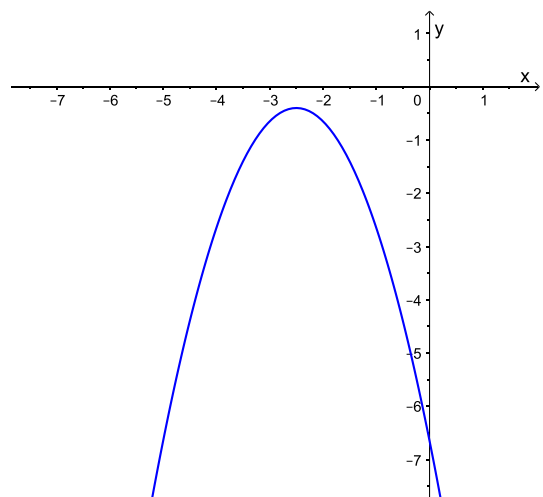
parabola prechádza dvakrát x -ovou osou
 x -ová os je sečnicou paraboly (2 spoločné body)



parabola sa dotýka x -ovú os
 x -ová os je dotyčnicou paraboly (1 spoločný bod)



parabola je nad x -ovou osou



parabola je pod x -ovou osou

parabola nemá spoločný bod s x -ovou osou

Neúplné kvadratické rovnice

1. *chýba lineárny člen* ($b = 0$)

$$a \cdot x^2 + c = 0$$

$$a \cdot x^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad (x_1 \text{ a } x_2 \text{ sú opačné hodnoty})$$

podmienkou riešiteľnosti je, aby pod odmocninou vychádzalo kladné číslo:

$$-\frac{c}{a} > 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow \text{to znamená, že } a \text{ a } c \text{ musia mať opačné znamienka}$$

2. *chýba absolútny člen* ($c = 0$)

$$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$$

$$x(a \cdot x + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$a \cdot x + b = 0$$

$$a \cdot x = -b$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

v tomto prípade jedným riešením vždy bude číslo 0

3. *chýba aj lineárny aj absolútny člen* ($b = c = 0$)

$$a \cdot x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

takáto rovnica má jeden dvojnásobný koreň: nulu

príklad:

Riešte neúplné kvadratické rovnice:

a, $x^2 + 3x = 0$

b, $5x^2 - 125 = 0$

c, $x^2 + 3 = 0$

d, $7 - x^2 = 0$

e, $4x = 3x^2$

f, $(x + 6)^2 = 81$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x_2 = -3$$

$$5x^2 - 125 = 0$$

$$5x^2 = 125$$

$$x^2 = 25$$

$$|x| = 5$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -5$$

$$x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = -3$$

nemá riešenie

$$7 - x^2 = 0$$

$$7 = x^2$$

$$\sqrt{7} = |x|$$

$$x_1 = \sqrt{7}$$

$$x_2 = -\sqrt{7}$$

$$4x = 3x^2$$

$$4x - 3x^2 = 0$$

$$x(4 - 3x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$4 - 3x = 0$$

$$4 = 3x$$

$$\frac{4}{3} = x_2$$

$$(x + 6)^2 = 81$$

$$|x + 6| = 9$$

$$x + 6 = 9$$

$$x_1 = 3$$

$$x + 6 = -9$$

$$x_2 = -15$$

Úplné kvadratické rovnice

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

/-c

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) = -c$$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) = -c + a \cdot \left(\frac{b}{2a} \right)^2$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = -c + \frac{b^2}{4a}$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a}$$

/:a

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

/√

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

zlúčený vzorec na výpočet koreňov kvadratickej rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

P. Hodnoty a, b a c nezávisia od poradia – potom by rovnice $3x^2 - 5x - 2 = 0$ a $-5x - 2 + 3x^2 = 0$ mali iné riešenia, hoci ide o tú istú rovnicu, len inakšie usporiadanými členmi:

a je koeficient kvadratického člena (číslo čo násobí druhú mocninu neznámej aj so znamienkom)

b je koeficient lineárneho člena (číslo čo násobí prvú mocninu neznámej aj so znamienkom)

c je absolútny člen/členy (číslo/čísla bez neznámej → niekedy vedľa iracionálneho čísla je aj celé/racionálne číslo – pr.: $c = -3 + \sqrt{5}$)

P. Samozrejme k úplnému riešeniu aj tohto typu rovníc patrí aj skúška správnosti.

Vzorec obsahuje druhú odmocninu, čo sa nedá počítať zo záporných čísel (aspoň v množine reálnych čísel nie). Preto znamienko základu odmocniny je rozhodujúce pri riešiteľnosti kvadratických rovníc. Kvôli tomu tento výraz (odmocnenec) dostal aj zvlášť názov: diskriminant – „určujúce“, „rozhodujúce“.

diskriminant kvadratickej rovnice: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

určí počet riešení

a, $D > 0 \Rightarrow$ rovnica má dva korene

b, $D = 0 \Rightarrow$ rovnica má jeden, dvojnásobný koreň

c, $D < 0 \Rightarrow$ rovnica nemá riešenie v množine reálnych čísel

rozloženie na **súčin koreňových (lineárnych) činiteľov**: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Vièteove formuly: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$

ak $a = 1$ $x_1 + x_2 = -b$; $x_1 \cdot x_2 = c$

Vièteove formuly nám pomáhajú pri riešení kvadratických rovníc s celočíselnými koreňmi – nemusíme dosadzovať do vzorca.

Skúsime rozložiť kvadratický trojčlen na súčin koreňových činiteľov:

- súčet čísel zo zátvoriek sa rovná koeficientu lineárneho člena

- ich súčin zase dá absolútny člen

Keďže konkrétny súčet (ako súčet dvoch celých čísel) môžeme dosiahnuť nekonečne veľa spôsobom, ale súčin iba niekoľkými, vypíšeme možnosti pre súčin a potom medzi nimi hľadáme tú správnu dvojicu, kde ten súčet je toľko, koľko má byť. Toto celé zvykneme počítat' v hlave, a iba tú správnu dvojicu napísať už do zátvoriek.

príklad:

Riešte kvadratickú rovnicu rozložením na súčin: $x^2 - 5x - 24 = 0$

súčet má byť -5

súčin -24 – rozpíšeme možnosti

-1.24	1.(-24)
-2.12	2.(-12)
-3.8	3.(-8)
-4.6	4.(-6)

správny súčet vychádza s dvojicou 3 a -8

takže koreňovými činiteľmi rovnica má tvar:

$$(x + 3)(x - 8) = 0$$

to znamená:

$$x + 3 = 0 \quad \vee \quad x - 8 = 0$$

$$x_1 = -3; x_2 = 8$$

Riešte kvadratickú rovnicu rozložením na súčin: $x^2 + 7x - 78 = 0$

súčet má byť 7

súčin -78 – rozpíšeme možnosti

-1.78	1.(-78)
-2.39	2.(-39)
-3.26	3.(-26)
-6.13	6.(-13)

správny súčet vychádza s dvojicou -6 a 13

$$(x - 6)(x + 13) = 0$$

to znamená:

$$x - 6 = 0 \quad \vee \quad x + 13 = 0$$

$$x_1 = 6; x_2 = -13$$

Ale väčšinou nemáme také šťastie a rovnica má racionálne alebo iracionálne korene. Potom nám nič iné neostane, ale dosadiť do vzorca a tak vypočítat' riešenia.

Riešte kvadratickú rovnicu: $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$a = 2; b = -3; c = -2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Riešte kvadratickú rovnicu: $3x^2 = 2 - 5x$

rovnica musí byť anulovaná (redukovaná) – na jednej strane musí ostať nula, aby sme mohli dosadiť do vzorca → najprv ju upravíme

$$3x^2 = 2 - 5x \quad \quad \quad / -2 + 5x$$

$$3x^2 - 2 + 5x = 0$$

$$a = 3; b = 5; c = -2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{3} \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

Riešte kvadratickú rovnicu: $\frac{x-4}{x+3} + \frac{x+3}{x-4} = 2,5$

najprv musíme určiť podmienky – zabezpečiť, aby sa do menovateľa nedostala nula

$$x + 3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$$

$$x - 4 \neq 0 \rightarrow x \neq 4$$

$$\frac{x-4}{x+3} + \frac{x+3}{x-4} = 2,5 \quad / \cdot (x+3)(x-4)$$

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (x+3)^2 &= 2,5(x+3)(x-4) \\ x^2 - 8x + 16 + x^2 + 6x + 9 &= 2,5(x^2 - 4x + 3x - 12) \\ 2x^2 - 2x + 25 &= 2,5x^2 - 2,5x - 30 \quad / -2x^2 + 2x - 25 \\ 0 &= 0,5x^2 - 0,5x - 55 \quad / \cdot 2 \\ 0 &= x^2 - x - 110 \end{aligned}$$

$$a = 1; b = -1; c = -110$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-110)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 440}}{2} = \frac{1 \pm 21}{2} = \nearrow 11 \searrow -10$$

$$\text{Riešte kvadratickú rovnicu: } \frac{6-x}{3x^2-12} - \frac{1}{x-2} = 1 - \frac{1}{2-x}$$

$$3x^2 - 12 \neq 0$$

$$3(x^2 - 4) \neq 0$$

$$3(x+2)(x-2) \neq 0$$

$$x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$$

$$x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

$$\frac{6-x}{3x^2-12} - \frac{1}{x-2} = 1 - \frac{1}{2-x}$$

$$\frac{6-x}{3x^2-12} - \frac{1}{x-2} = 1 - \frac{1}{-1(-2+x)} \quad / \cdot 3(x+2)(x-2)$$

$$6 - x - 1.3(x+2) = 3(x^2 - 4) + 1.3(x+2)$$

$$6 - x - 3x - 6 = 3x^2 - 12 + 3x + 6$$

$$-4x = 3x^2 + 3x - 6 \quad / +4x$$

$$0 = 3x^2 + 7x - 6$$

$$a = 3; b = 7; c = -6$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{-7 \pm 11}{6} = \nearrow \frac{2}{3} \searrow -3$$