

Iracionálne rovnice

D. Rovnica je **iracionálna**, ak obsahuje neznámu pod odmocninou.

P. Ak ide o odmocninu s párnym odmocniteľom, potom musíme stanoviť definičný obor $\Leftarrow$ pod odmocninou nesmie byť záporná hodnota (výraz)
podmienku (podmienky) podčiarkneme raz

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+8} + 8 &= x \\ 2x + 8 &\geq 0 & /-8 \\ 2x &\geq -8 & /:2 \\ x &\geq -4\end{aligned}$$

po podmienkach môžeme začať s úpravami

Musíme odstrániť odmocninu $\rightarrow$ **umocnením rovnice**. Lenže umocnenie nie je ekvivalentnou úpravou rovnice.

pr.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} &= x - 10 \\ \text{po dosadení } x &= 7 \\ \text{L: } \sqrt{7+2} &= \sqrt{9} = 3 \\ \text{P: } 7 - 10 &= -3 \\ \text{L} &\neq \text{P}\end{aligned}$$

ale ak umocníme

$$\begin{aligned}x + 2 &= x^2 - 20x + 100 \\ \text{a znovu dosadíme } x &= 7 \\ \text{L: } 7 + 2 &= 9 \\ \text{P: } 7^2 - 20 \cdot 7 + 100 &= 49 - 140 + 100 = 9 \\ \text{L} &= \text{P}\end{aligned}$$

P. Umocnením rovnice môže pribudnúť riešenie, ktoré ale nie je riešením pôvodnej rovnice. Preto **vždy musíme urobiť skúšku správnosti**.

Ak rovnica obsahuje iba jednu odmocninu, potom upravme ju tak, aby odmocnina stála samostatne na jednej strane rovnice.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+8} + 8 &= x & /-8 \\ \sqrt{2x+8} &= x - 8 & /()^2 \\ 2x + 8 &= x^2 - 16x + 64 & /-2x - 8 \\ \text{anulujeme kvadratickú rovnicu} \\ 0 &= x^2 - 18x + 56 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 56}}{2 \cdot 1} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 224}}{2} = \frac{18 \pm 10}{2} = \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix}\end{aligned}$$

obidve výsledky vyhovujú podmienkam – teoreticky by mohli byť riešením, ale treba urobiť skúšku

$$\begin{aligned}\text{L: } \sqrt{2 \cdot 14 + 8} + 8 &= \sqrt{36} + 8 = 6 + 8 = 14 \\ \text{P: } 14 \\ \text{L} &= \text{P} \Rightarrow x = 14 \text{ je riešením} \\ \text{L: } \sqrt{2 \cdot 4 + 8} + 8 &= \sqrt{16} + 8 = 4 + 8 = 12 \\ \text{P: } 4 \\ \text{L} &\neq \text{P} \Rightarrow x = 4 \text{ nie je riešením}\end{aligned}$$

Ak rovnica obsahuje viac odmocnín, po prvom umocnení nezmiznú všetky odmocniny $\Leftarrow$ umocnením dvojčlena

v prostrednom člene ostáva odmocnina: $(a + \sqrt{\text{výraz}})^2 = a^2 + 2a \cdot \sqrt{\text{výraz}} + \text{výraz}$

Ak ostal iba jeden člen s odmocninou, tak osamostatníme na jednej strane, a znovu umocníme rovnicu.

príklad:

$$\begin{aligned}\sqrt{5x+20} + \sqrt{x+8} &= 2 \\ 5x + 20 &\geq 0\end{aligned}$$

$$5x \geq -20$$

$$x \geq -4$$

$$x + 8 \geq 0$$

$$x \geq -8$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5x+20} + \sqrt{x+8} &= 2 & /()^2 \\ 5x+20+2\sqrt{5x+20}\sqrt{x+8}+x+8 &= 4 \\ 6x+28+2\sqrt{(5x+20)(x+8)} &= 4 & /-6x-28 \\ 2\sqrt{(5x+20)(x+8)} &= -6x-24 & /:2 \\ \sqrt{(5x+20)(x+8)} &= -3x-12 & /()^2 \\ (5x+20)(x+8) &= 9x^2+72x+144 \\ 5x^2+40x+20x+160 &= 9x^2+72x+144 \\ 5x^2+60x+160 &= 9x^2+72x+144 & /-5x^2-60x-160 \\ 0 &= 4x^2+12x-16 & /:4 \\ 0 &= x^2+3x-4 \\ 0 &= (x+4)(x-1) \end{aligned}$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 1$$

$$L: \sqrt{5 \cdot (-4) + 20} + \sqrt{-4 + 8} = \sqrt{-20 + 20} + \sqrt{4} = 0 + 2 = 2$$

$$P: 2$$

$$L = P \Rightarrow x = -4 \text{ je riešením}$$

$$L: \sqrt{5 \cdot 1 + 20} + \sqrt{1 + 8} = \sqrt{5 + 20} + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$$

$$P: 2$$

$$L \neq P \Rightarrow x = 1 \text{ nie je riešením}$$

Riešte rovnice:

$$a, \sqrt{x^2 - 7} = 3$$

$$d, \sqrt{x+1} + 1 = x$$

$$b, \sqrt{x} + 1 = 2x$$

$$e, \sqrt{x^2 - 12} = \sqrt{x}$$

$$c, \sqrt{x} + 6 = x$$

$$f, \sqrt{x+2} = \sqrt{8-x^2}$$

Riešte rovnice:

$$a, \sqrt{x^2 + 9} = 2x - 3$$

$$c, \sqrt{2x-11} - \sqrt{x-1} = 1$$

$$e, \sqrt{5x+20} + \sqrt{x+8} = 2$$

$$b, \sqrt{x^2 - 9} = 3x - 11$$

$$d, \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 5$$

$$f, \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1$$