

Množiny

základný pojem: množina

množina – súhrn objektov, ktoré sú presne vymedzené; dokážeme jednoznačne určiť, či nejaký objekt patrí alebo nepatrí do tej množiny

zápis: veľké tlačené písmená

prvky – objekty množiny

$a \in A$ – a patrí do množiny A

$b \notin A$ – b nepatrí do množiny A

podľa počtu prvkov:

konečná: konečný počet prvkov

nekonečná: nekonečný počet prvkov

nekonečná spočítateľná ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)

nekonečná nespočítateľná (kontinuum) ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

špeciálne množiny (podľa počtu prvkov)

prázdná množina – neobsahuje žiaden prvok: $\emptyset$ alebo $\{\}$

$\forall a: a \notin \emptyset$

$\forall A: A \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset A$

základná množina (univerzálna) – obsahuje „všetko“: U

$\forall A: A \subset U$

mohutnosť (kardinalita) – počet prvkov množiny: $|A|$ alebo $\text{card}(A)$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ (alef)

$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

$\mathfrak{c} > \aleph_0$

určenie množín

a, vymenovaním prvkov: $A = \{2; 7; 13; 27; 41\}$ – iba konečné

b, charakteristickou vlastnosťou: $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n \leq 15\}$

c, operáciou z iných množín: $A \cap B$

Vennov diagram – grafické znázornenie množín

množinové operácie

1, **rovnosť množín** – obsahujú tie isté prvky

$A = B := (\forall a: a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (\forall b: b \in B \Rightarrow b \in A)$

$|A| = |B|$

2a, **podmnožina** – každý prvok podmnožiny patrí aj do obsahujúcej množiny

$A \subseteq B := \{\forall a \mid a \in A \Rightarrow a \in B\}$

potenčná množina – množina všetkých podmnožín množiny: $\mathcal{P}(A) := \{H \mid H \subseteq A\}$

$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

triviálne podmnožiny – sú podmnožinami každej neprázdnej množiny:

prázdná množina a samotná množina

$\forall A \neq \emptyset: \emptyset \subseteq A \wedge A \subseteq A$

2b, vlastná podmnožina

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$

3, **prienik množín** – spoločné prvky množín

$A \cap B := \{\forall a \mid a \in A \wedge a \in B\}$

disjunktné množiny – nemajú spoločné prvky

$A \cap B = \emptyset$

4, **zjednotenie množín (únia)** – všetky prvky množín

$A \cup B := \{\forall a \mid a \in A \vee a \in B\}$

5, **rozdiel množín** – prvky, ktoré sú iba v prvej množine a v druhej nie

$A \setminus B := \{\forall a \mid a \in A \wedge a \notin B\} \wedge B \not\subset A$

čítaj: „A bez B“

6, **symetrická diferencia množín** – prvky, ktoré sú iba v jednej množine

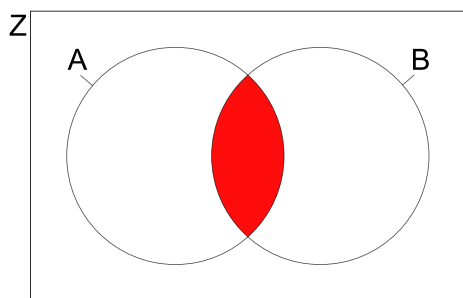
$A \Delta B := \{\forall a, b \mid (a \in A \wedge a \notin B) \vee (b \in B \wedge b \notin A)\} \equiv$

$$\equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B) \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

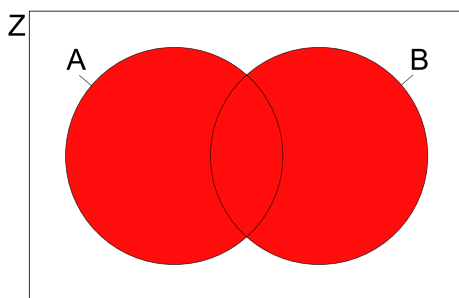
7, **doplnok množiny** (doplnková množina, komplement) – prvky, ktoré sú iba v obsahujúcej množine a v podmnožine nie

$$C_A B := \{\forall a | a \in A \wedge a \notin B\} \wedge B \subset A$$

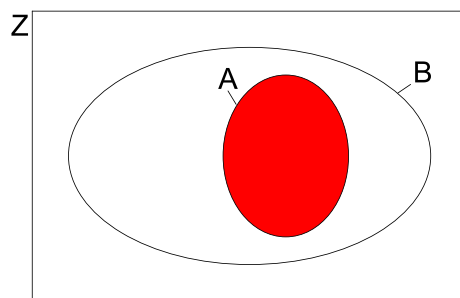
čítaj: „doplnok množiny B v množine A“



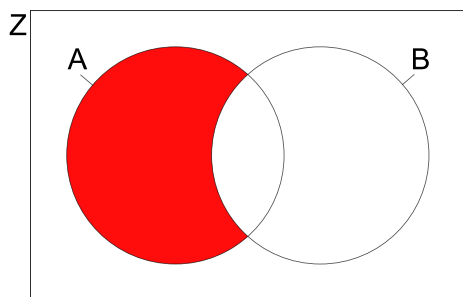
$A \cap B$



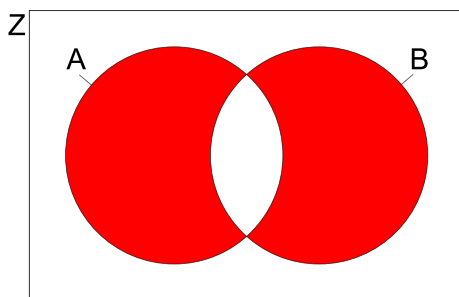
$A \cup B$



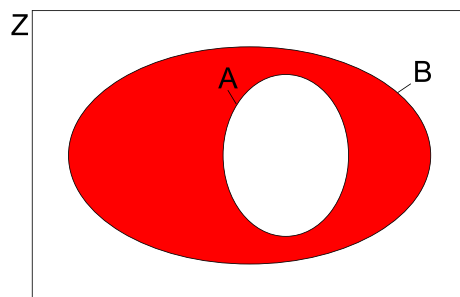
$A \subset B$



$A \setminus B$



$A \Delta B$ alebo $A \odot B$



$C_B A$

príklad:

Daná je množina: $A = \{1; 2; 3\}$. Určte všetky podmnožiny množiny A.

$$A_i \subset A; i \in \mathbb{N}$$

$$A_1 = \{\}$$

$$A_2 = \{1\}$$

$$A_5 = \{1; 2\}$$

$$A_8 = \{1; 2; 3\}$$

$$A_3 = \{2\}$$

$$A_6 = \{1; 3\}$$

$$A_4 = \{3\}$$

$$A_7 = \{2; 3\}$$

Daná je množina: $B = \{a; b; c; d; e\}$. Určte všetky podmnožiny množiny B.

$$B_i \subset B; i \in \mathbb{N}$$

$$B_1 = \{\}$$

$$B_2 = \{a\}$$

$$B_7 = \{a; b\}$$

$$B_{12} = \{b; d\}$$

$$B_{17} = \{a; b; c\}$$

$$B_{22} = \{a; d; e\}$$

$$B_{27} = \{a; b; c; d\}$$

$$B_{30} = \{a; c; d; e\}$$

$$B_{32} = \{a; b; c; d; e\}$$

$$B_3 = \{b\}$$

$$B_8 = \{a; c\}$$

$$B_{13} = \{b; e\}$$

$$B_{18} = \{a; b; d\}$$

$$B_{23} = \{b; c; d\}$$

$$B_{28} = \{a; b; c; e\}$$

$$B_{31} = \{b; c; d; e\}$$

$$B_4 = \{c\}$$

$$B_9 = \{a; d\}$$

$$B_{14} = \{c; d\}$$

$$B_{19} = \{a; b; e\}$$

$$B_{24} = \{b; c; e\}$$

$$B_{28} = \{a; b; c; e\}$$

$$B_{31} = \{b; c; d; e\}$$

$$B_5 = \{d\}$$

$$B_{10} = \{a; e\}$$

$$B_{15} = \{c; e\}$$

$$B_{20} = \{a; c; d\}$$

$$B_{25} = \{b; d; e\}$$

$$B_{28} = \{a; b; c; e\}$$

$$B_{31} = \{b; c; d; e\}$$

$$B_6 = \{e\}$$

$$B_{11} = \{b; c\}$$

$$B_{16} = \{d; e\}$$

$$B_{21} = \{a; c; e\}$$

$$B_{26} = \{c; d; e\}$$

$$B_{29} = \{a; b; d; e\}$$

Dané sú množiny: $A = \{1; 4; 7; 9; 12\}$; $B = \{-3; 0; 2; 4\}$. Určte:

a, $A \cap B$

b, $A \cup B$

c, $A \setminus B$

d, $B \setminus A$

$$A \cap B = \{4\}$$

$$A \cup B = \{-3; 0; 1; 2; 4; 7; 9; 12\}$$

$$A \setminus B = \{1; 7; 9; 12\}$$

$$B \setminus A = \{-3; 0; 2\}$$

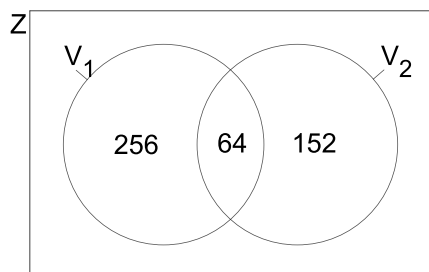
Dané sú množiny: $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$; $B = \{1; 3; 5; 7\}$; $C = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$; $D = \{1; 2; 3; 5; 8; 13; 21\}$. Určte ich mohutnosť, všetky prieniky, všetky zjednotenia a všetky rozdiely.

$$\begin{aligned}
 |A| &= 5 & |B| &= 4 & |C| &= 6 & |D| &= 7 \\
 A \cap B &= \{\} & A \cap C &= \{2\} & A \cap D &= \{2; 8\} \\
 B \cap C &= \{3; 5; 7\} & B \cap D &= \{1; 3; 5\} & C \cap D &= \{2; 3; 5; 13\} \\
 A \cup B &= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10\} \\
 A \cup C &= \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 13\} \\
 A \cup D &= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 13; 21\} \\
 B \cup C &= \{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13\} \\
 B \cup D &= \{1; 2; 3; 5; 7; 8; 13; 21\} \\
 C \cup D &= \{1; 2; 3; 5; 7; 8; 11; 13; 21\} \\
 A \setminus B &= \{2; 4; 6; 8; 10\} & B \setminus A &= \{1; 3; 5; 7\} \\
 A \setminus C &= \{4; 6; 8; 10\} & C \setminus A &= \{3; 5; 7; 11; 13\} \\
 A \setminus D &= \{4; 6; 10\} & D \setminus A &= \{1; 3; 5; 13; 21\} \\
 B \setminus C &= \{1\} & C \setminus B &= \{2; 11; 13\} \\
 B \setminus D &= \{7\} & D \setminus B &= \{2; 8; 13; 21\} \\
 C \setminus D &= \{7; 11\} & D \setminus C &= \{1; 8; 21\}
 \end{aligned}$$

V meste sú dve výstavy obrazov. Jeden deň navštívilo prvú z nich 320 osôb, druhú z nich 216 osôb, z ktorých 152 navštívilo iba druhú výstavu. Koľko osôb navštívilo len prvú výstavu?

$$\begin{aligned}
 |B| &= |B \setminus A| + |A \cap B| \\
 216 &= 152 + |A \cap B| \\
 64 &= |A \cap B| \\
 |A| &= |A \setminus B| + |A \cap B| \\
 320 &= |A \setminus B| + 64 \\
 \mathbf{256} &= |A \setminus B|
 \end{aligned}$$

alebo graficky



Dané sú množiny: $A = \{-5; -3; -2; 0; 3; 4; 6; 7\}$, $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b \text{ je párne} \wedge b \leq 4\}$. Určte prvky množín:

$$\begin{aligned}
 \text{a, } A \cap B & & \text{b, } A \cup B & & \text{c, } A \setminus B & & \text{d, } B \setminus A
 \end{aligned}$$

Dané sú množiny: $A = \{-1; 0; 2; 5; 6; 7; 10; 11; 15\}$, $B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \text{ je deliteľné } 3\}$. Určte prvky množín:

$$\begin{aligned}
 \text{a, } A \cap B & & \text{b, } A \cup B & & \text{c, } A \setminus B & & \text{d, } B \setminus A
 \end{aligned}$$

Dané sú množiny: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n < 20\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < n \leq 18\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 8\}$. Určte prvky množín:

$$\begin{aligned}
 \text{a, } A \cap B & & \text{b, } B \cup C & & \text{c, } C \setminus A
 \end{aligned}$$

V škole sú tri záujmové krúžky: fotografický, motoristický a šachový. Každý žiak z triedy chodí do niektorého z nich. Do fotografického chodí 16 žiakov, do motoristického chodí 17 žiakov a do šachového 14 žiakov. Osem žiakov chodí súčasne do fotografického i motoristického krúžku, šesť do fotografického i šachového, štyria do motoristického i šachového. Traja žiaci navštevujú všetky tri krúžky. Koľko žiakov je v triede?