

## Függvények (Funkcie)

$$X, Y \subseteq \mathbb{R}$$

**rendezett számpár** (usporiadaná dvojica čísel) – két szám adott sorrendben (függ a sorrendtől)

jelölés:  $[x; y]$  vagy  $(x; y)$

$$[x; y] = [y; x] \Leftrightarrow x = y$$

**halmazok Descartes-szorzata** (karteziánsky/kartézsky súčin množín) – a két halmaz elemeiből képezett összes rendezett pár halmaza, ahol a rendezett párokban az első helyre az első, a második helyre pedig a második halmazból kerülnek

$$X \times Y := \{[x; y] \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

$$\text{ha } |X| = n \text{ és } |Y| = m \Rightarrow |X \times Y| = n \cdot m$$

$$\text{pl. } X = \{1; 2; 3; 4; 5\}; Y = \{10; 20; 30; 40\}$$

$$X \times Y = \{[1; 10]; [1; 20]; [1; 30]; [1; 40]; \\ [2; 10]; [2; 20]; [2; 30]; [2; 40]; \\ [3; 10]; [3; 20]; [3; 30]; [3; 40]; \\ [4; 10]; [4; 20]; [4; 30]; [4; 40]; \\ [5; 10]; [5; 20]; [5; 30]; [5; 40]\}$$

**D. A függvény** (funkcia) két számhalmaz Descartes-szorzatának olyan részhalmaza, melyben a rendezett számpárok első helyén nem ismétlődik egyetlen szám sem.

$$f \subset X \times Y$$

$$f := \{[x; y] \mid x \in X \wedge y \in Y; \forall [x_1; y_1]; [x_2; y_2] \in f \wedge x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2\}$$

**D. (rövid verzió)** Minden  $x$ -hez csak egy  $y$  tartozik  $\rightarrow$  vagyis egyértelmű.

jelölés:

$$f: y = \text{előírás}$$

$$f(x) = \text{előírás}$$

$$f: x \mapsto \text{előírás}$$

$$\text{pl. } f = \{[1; 30]; [2; 10]; [5; 20]\}$$

$$g = \{[1; 20]; [2; 30]; [3; 40]; [4; 10]; [5; 40]\}$$

$$h = \{[1; 40]; [3; 20]; [4; 30]; [5; 10]\}$$

$$\text{ellenpélda: } i = \{[1; 10]; [2; 20]; [3; 20]; [4; 20]; [4; 40]; [5; 30]\}$$

**a függvény értelmezési tartománya** (definičný obor funkcie) ( $D_f$  vagy  $D(f)$ ) – azon  $x$ -értékek halmaza (a független változók halmaza), melyek a függvényhez tartozó rendezett számpárok első helyein szerepelnek

$$D_f \subseteq X$$

$$D_f := \{x \mid \exists y: [x; y] \in f\}$$

$$\text{pl. } D_f = \{1; 2; 5\}, D_g = \{1; 2; 3; 4; 5\}, D_h = \{1; 3; 4; 5\}$$

**a függvény értékkészlete** (obor funkčných hodnôt) ( $H_f/R_f$  vagy  $H(f)$ ) – azon  $y$ -értékek halmaza (függvényértékek, függő változók halmaza), melyek a függvényhez tartozó rendezett számpárok második helyein szerepelnek

$$H_f \subseteq Y$$

$$H_f := \{y \mid \exists x: [x; y] \in f\}$$

$$\text{pl. } H_f = \{10; 20; 30\}, H_g = \{10; 20; 30; 40\}, H_h = \{10; 20; 30; 40\}$$

**koordináta-rendszer** (súradnicová sústava) – két egyenes + egységek a tengelyeken

$x$  tengely: abszcissza

$y$  tengely: ordináta

ortogonális rendszer: derékszögű

klinogonális rendszer: ferdeszögű

normált rendszer: azonos léptékű (egységű)

denormált rendszer: különböző léptékű

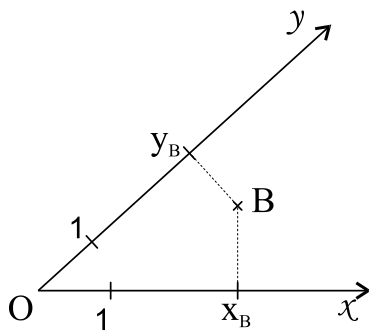
ortonormált (Descartes-féle) rendszer: derékszögű + azonos léptékű

**M. ferdeszögű koordináta-rendszer** (kosouhlá/šikmá sústava): a tengelyek nem merőlegesek

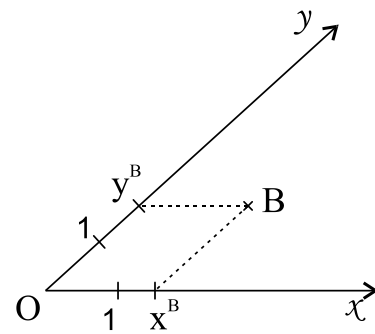
kovariáns és kontravariáns koordináták

**kovariáns koordináták:** merőlegesen a tengelyekre –  $B(x_B; y_B)$

**kontravariáns koordináták:** párhuzamosan a másik tengellyel –  $B(x^B; y^B)$



kovariáns koordináták



kontravariáns koordináták

**görbe vonalú koordináta-rendszer** (krivočiara sústava): a tengelyek görbék

**a függvény grafikonja (gráfja)** (graf funkcie) – a függvényhez tartozó rendezett számpárok, mint koordináta-rendszerbeli pontok összessége

**injektív (kölcsonösen egyértelmű) függvény** (injektívna/prostá funkcia) – függvényhez tartozó rendezett számpárokból nem ismétlődnek a második helyen sem az elemek – más  $x$ -hez más  $y$  tartozik

$$f := \{ \forall [x_1; y_1]; [x_2; y_2] \in f \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \}$$

az  $f$  és a  $h$  függvények injektívek

**szürjektív (ráképezés) függvény** (surjektívna funkcia) – a második halmaz ( $Y$ ) minden eleme szerepel legalább egyszer függvényértékként (hozzá van rendelve valamely  $x$ -hez)

$$H_f = Y$$

$$H_f = \{ y \mid \forall y \in Y \Rightarrow \exists x: [x; y] \in f \}$$

a  $g$  és a  $h$  függvények szürjektívek

**bijektív (kölcsonösen egyértelmű ráképezés) függvény** (bijektívna funkcia) – injektív és szürjektív is

a  $h$  függvény bijektív

**monotonitás** (monotónnosť) (**M.**) – monoton és szigorúan monoton

**monoton növekvő függvény** (rastúca funkcia) – az  $f$  függvény az  $I_1$  intervallumon (intervallumban) monoton növekvő, ha ezen intervallumon nagyobb  $x$  értékhez nagyobb függvényérték tartozik

$$I_1 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I_1: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

**monoton csökkenő függvény** (klesajúca funkcia) – az  $f$  függvény az  $I_2$  intervallumon monoton csökkenő, ha ezen intervallumon nagyobb  $x$  értékhez kisebb függvényérték tartozik

$$I_2 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_3, x_4 \in I_2: x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_3) > f(x_4)$$

**nemcsökkenő függvény** (neklesajúca funkcia) –  $I_3 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_5, x_6 \in I_3: x_5 < x_6 \Rightarrow f(x_5) \leq f(x_6)$

**nemnövekvő függvény** (nerastúca funkcia) –  $I_4 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_7, x_8 \in I_4: x_7 < x_8 \Rightarrow f(x_7) \geq f(x_8)$

**zérushelyek** (nulové/osové body) (**Z.H.**) – a függvény grafikonjának közös pontjai a tengelyekkel (ha léteznek)

az  $x$  tengely pontjainak  $y$  koordinátája 0:  $X_1(x_1; 0)$

az  $y$  tengely pontjainak  $x$  koordinátája 0:  $Y(0; y)$

**M.** Egy függvény grafikonjának végtelen sok közös pontja lehet az  $x$  tengellyel  $\leftrightarrow$  de az  $y$  tengellyel legfeljebb egy lehet (különben megszűnne függvénynek lenni – a definícióval ellentmondana)

**függvény párossága** (párnosť funkcie) (**Pá.**) – a függvények többsége se nem páros, se nem páratlan

**páros függvény** (párna funkcia) – az  $f$  függvény páros, ha ellentett  $x$  értékekhez azonos függvényértékek tartoznak

$$\forall x \in D_f: f(x) = f(-x)$$

a páros függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus (tükrös) az  $y$  tengely szerint

**páratlan függvény** (nepárna funkcia) – az  $f$  függvény páratlan, ha ellentett  $x$  értékekhez ellentett függvényértékek tartoznak

$$\forall x \in D_f: f(x) = -f(-x)$$

a páratlan függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus az origó szerint

*a függvény szélsőértékei* (extrémum funkcie) (**Sz.É.**) – lokális (helyi) ↔ globális (abszolút)

**lokális minimum** (lokálne minimum) – az  $f$  függvénynek az  $x_1$  pontban lokális minimuma van, ha az  $(a_1; b_1)$  nyílt intervallum  $x_1$  pontjában éri el a legkisebb függvényértéket

$$\exists (a_1; b_1) \subset D_f: x_1 \in (a_1; b_1) \wedge \forall x \in (a_1; b_1) \setminus \{x_1\} \Rightarrow f(x_1) < f(x)$$

**lokális maximum** (lokálne maximum) – az  $f$  függvénynek az  $x_2$  pontban lokális maximuma van, ha az  $(a_2; b_2)$  nyílt intervallum  $x_2$  pontjában veszi fel a legnagyobb függvényértéket

$$\exists (a_2; b_2) \subset D_f: x_2 \in (a_2; b_2) \wedge \forall x \in (a_2; b_2) \setminus \{x_2\} \Rightarrow f(x) < f(x_2)$$

**globális minimum** (globálne minimum) – az  $f$  függvénynek az  $x_3$  pontban globális minimuma van, ha az értelmezési tartomány  $x_3$  pontjában veszi fel a legkisebb függvényértéket

$$x_3 \in D_f \wedge \forall x \in D_f \setminus \{x_3\} \Rightarrow f(x_3) < f(x)$$

**globális maximum** (globálne maximum) – az  $f$  függvénynek az  $x_4$  pontban globális maximuma van, ha az értelmezési tartomány  $x_4$  pontjában éri el a legnagyobb függvényértéket

$$x_4 \in D_f \wedge \forall x \in D_f \setminus \{x_4\} \Rightarrow f(x) < f(x_4)$$

*a függvény periodikussága/periodicitása* (periodickosť/periodicita funkcie) (**Pe.**) – az  $f$  függvény periodikus, ha létezik olyan pozitív  $p$  szám (periódus), hogy a függvény az  $x$  pontban ugyanazon függvényértéket vesz fel, mint  $p$ -vel odébb.

$$\exists p > 0: \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = f(x + p)$$

**M.** A periodicitás definíciójából következik, hogy a periódus egész-számszorosával odébb is ugyanazt a függvényértéket adja:  $\forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = f(x + k \cdot p)$ .

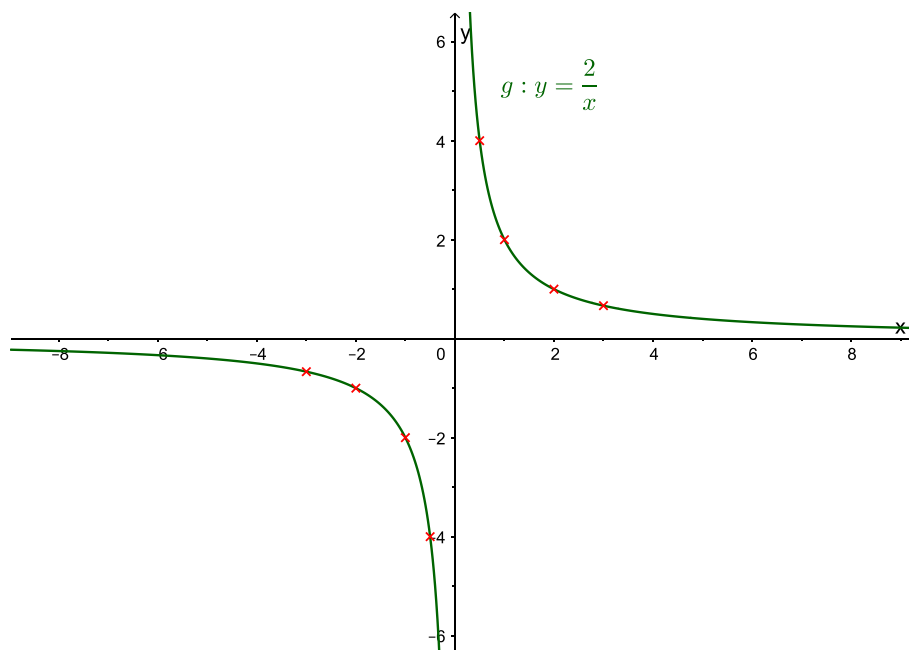
### A fordított arányosság – lineáris törtfüggvény (Nepriama úmernosť – lineárna lomená funkcia)

általános iskolából – két érték szorzata állandó:  $x \cdot y = k$

$$f: y = \frac{k}{x} \quad k \in \mathbb{R}$$

pl.  $g: y = \frac{2}{x}$

|   |                |    |    |                |               |   |   |               |
|---|----------------|----|----|----------------|---------------|---|---|---------------|
| x | -3             | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3             |
| y | $-\frac{2}{3}$ | -1 | -2 | -4             | 4             | 2 | 1 | $\frac{2}{3}$ |



a fordított arányosság fogalmának kibővítése → a lineáris törtfüggvény

$$f: y = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0} = \frac{a}{x + b} + c \quad a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

az  $a$  szám hatása a függvény grafikonjára

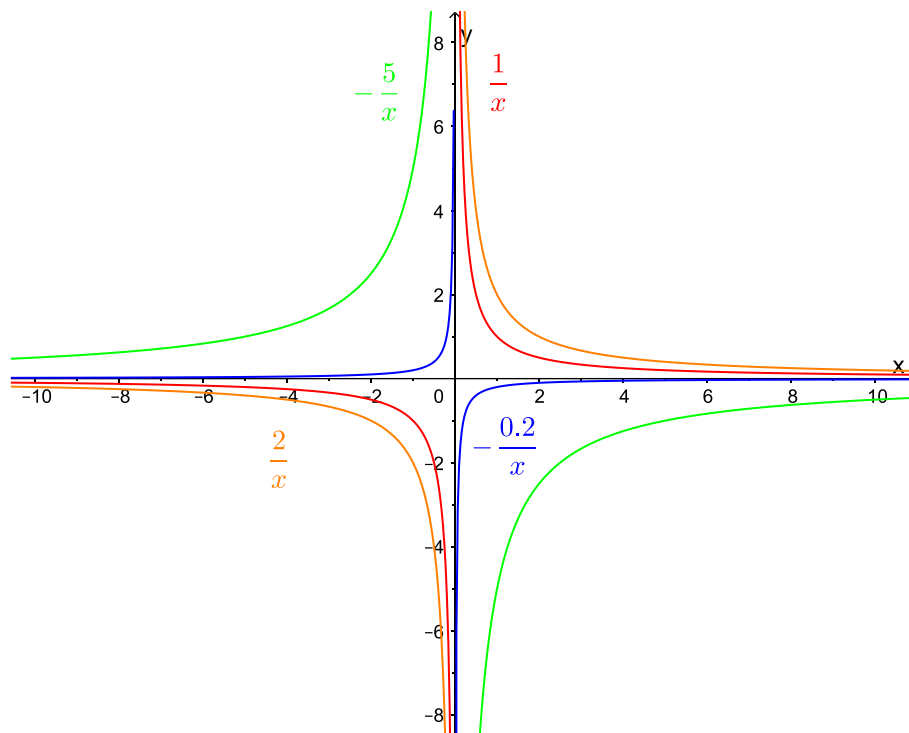
$f: y = \frac{1}{x}$

$g: y = \frac{2}{x}$

$h: y = -\frac{5}{x}$

$i: y = -\frac{0,2}{x}$

| x                | -3             | -2             | -1            | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | 1              | 2               | 3               |
|------------------|----------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $\frac{1}{x}$    | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1            | -2             | 2              | 1              | $\frac{1}{2}$   | $\frac{1}{3}$   |
| $\frac{2}{x}$    | $-\frac{2}{3}$ | -1             | -2            | -4             | 4              | 2              | 1               | $\frac{2}{3}$   |
| $-\frac{5}{x}$   | $\frac{5}{3}$  | $\frac{5}{2}$  | 5             | 10             | -10            | -5             | $-\frac{5}{2}$  | $-\frac{5}{3}$  |
| $-\frac{0,2}{x}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$  | $-\frac{2}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{10}$ | $-\frac{1}{15}$ |



az **a** szám a függvény **alakját és monotonitását** befolyásolja

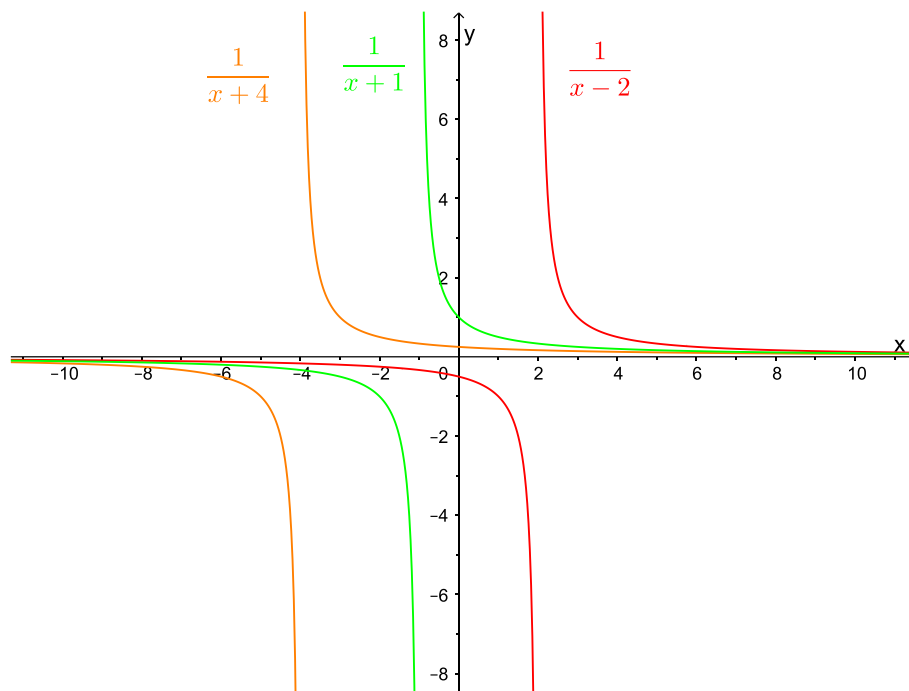
a **b** szám hatása a függvény grafikonjára

$$f: y = \frac{1}{x-2}$$

$$g: y = \frac{1}{x+4}$$

$$h: y = \frac{1}{x+1}$$

| x               | -3             | -2             | -1             | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | 1             | 2             | 3             |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{1}{x-2}$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{5}$ | $-\frac{2}{3}$ | -1            | –             | 1             |
| $\frac{1}{x+4}$ | 1              | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{3}$  | $\frac{2}{7}$  | $\frac{2}{9}$  | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ |
| $\frac{1}{x+1}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1             | –              | 2              | $\frac{2}{3}$  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |

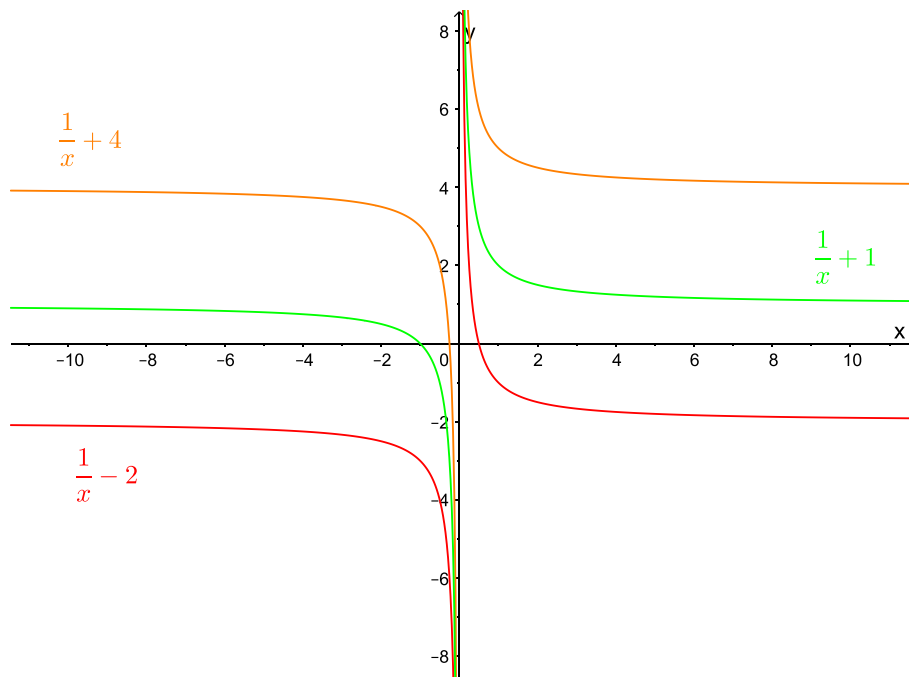


a **b** szám a függvény **helyét** befolyásolja → eltolja az  $x$  tengely irányában **-b**-vel

a **c** szám hatása a függvény grafikonjára

$f: y = \frac{1}{x} - 2$        $g: y = \frac{1}{x} + 4$        $h: y = \frac{1}{x} + 1$

| x                 | -3             | -2             | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1  | 2              | 3              |
|-------------------|----------------|----------------|----|----------------|---------------|----|----------------|----------------|
| $\frac{1}{x} - 2$ | $-\frac{7}{3}$ | $-\frac{5}{2}$ | -3 | -4             | 0             | -1 | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{3}$ |
| $\frac{1}{x} + 4$ | $\frac{11}{3}$ | $\frac{7}{2}$  | 3  | 2              | 6             | 5  | $\frac{9}{2}$  | $\frac{13}{3}$ |
| $\frac{1}{x} + 1$ | $\frac{2}{3}$  | $\frac{1}{2}$  | 0  | -1             | 3             | 2  | $\frac{3}{2}$  | $\frac{4}{3}$  |



a **c** szám a függvény **helyét** befolyásolja → eltolja az  $y$  tengely irányában **c**-vel

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-b\}$

$H_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

**G.** +45°-kal elforgatott hiperbola középpontjával a  $(-b; c)$  koordinátájú pontban

**M.**  $a > 0$  esetén  $x \in (-\infty; -b) \cup (-b; \infty)$  m.↓

$a < 0$  esetén  $x \in (-\infty; -b) \cup (-b; \infty)$  m.↑

**Z.H.**  $X\left(-\frac{a+bc}{c}; 0\right)$  – csak  $c \neq 0$  esetén létezik

$Y\left(0; \frac{a+bc}{b}\right)$  – csak  $b \neq 0$  esetén létezik

**Sz.É.** nincs