

Odmocniny

$$\sqrt[n]{a} = b$$

$$a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$$

n-tá odmocnina z čísla a

a	základ odmocniny (odmocnenec)
n	odmocniteľ (exponent)
b	hodnota odmocniny
$\sqrt[n]{a}$	odmocnina

D. n-tá odmocnina z čísla a je číslo b , ak platí, že po umocnení čísla b na n -tú dostaneme späť číslo a .

$$\sqrt[n]{a} := b \Leftrightarrow b^n = a$$

P. Odmocnenie je inverzná operácia k umocneniu.

pr.

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \text{ lebo } (-3)^3 = -27$$

$$\sqrt[5]{7\,776} = 6, \text{ lebo } 6^5 = 7\,776$$

$$\sqrt{256} = 16, \text{ lebo } 16^2 = 256 \leftrightarrow \text{ale } (-16)^2 = 256 \text{ tiež}$$

$$\sqrt[4]{625} = 5, \text{ lebo } 5^4 = 625 \leftrightarrow \text{ale } (-5)^4 = 625 \text{ tiež}$$

V. Párne odmocniny z kladných čísel sú kladné.

P. Párne odmocniny medzi reálnymi číslami majú iba nezáporné čísla. Ak rozšírime odmocnenie na množinu bohatšej číselnej množiny ako sú stredoškólakmi známe reálne čísla (na takzvané komplexné čísla), potom aj záporným číslam existujú párne odmocniny. Preto pred úpravami mocnín s párnymi odmocniteľmi musíme skôr určiť podmienky a tým zabezpečiť, aby sa pod odmocninu nedostalo záporné číslo.

P. Dvojka, ako odmocniteľ sa nepíše (ak ostane tam dvojka, nie je to chyba).

namiesto $\sqrt[2]{x}$ stačí $\sqrt{x}$

V.

$$\forall a \in \mathbb{R}: \sqrt[n]{a} = a$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{0} = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{1} = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall a \in \mathbb{R}: \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\forall a > 0: \sqrt[n]{a} > 0$$

$$\forall a < 0 \wedge n = 2k + 1 \text{ kde } k \in \mathbb{N} \text{ (n je nepárne číslo): } \sqrt[n]{a} < 0$$

V. $a, b \in \mathbb{R} \wedge n, m, c \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge c \neq 0$

a, **odmocnina zo súčiny** ($\leftarrow$ súčin odmocnín so spoločným odmocniteľom)

odmocníme obidva činitele (odmocníme súčin základov)

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[5]{x^2 \cdot y^3} = \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{y^3}$$

$$\sqrt[7]{x^4} \cdot \sqrt[7]{x^2} = \sqrt[7]{x^4 \cdot x^2} = \sqrt[7]{x^6}$$

b, **odmocnina z podielu** ($\leftarrow$ podiel odmocnín so spoločným odmocniteľom)

odmocníme aj čitateľ aj menovateľ (odmocníme podiel základov)

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$b \neq 0$$

$$\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}}$$

$$\sqrt[7]{\frac{x^6}{x^5}} = \sqrt[7]{\frac{x^6}{x^5}} = \sqrt[7]{x}$$

c, **odmocnina z mocniny** ($\leftarrow$ mocnina odmocniny)

môžeme zmeniť poradie umocnenia a odmocnenia

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

$$\sqrt[5]{x^2} = (\sqrt[5]{x})^2$$

d, **odmocnina odmocniny** (← odmocnina so zloženým číslom ako odmocniteľom)

odmocnitele vynásobíme (vyjadríme ako odmocninu odmocniny, kde súčin odmocniteľov dá to zložené číslo)

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[7]{x^6}} = \sqrt[35]{x^6}$$

$$\sqrt[24]{y^8} = \sqrt[3]{\sqrt[8]{y^8}} = \sqrt[3]{y}$$

e, **rozšírenie odmocniny z mocniny** (← zjednodušenie [krátenie] odmocniny z mocniny)

aj mocniteľ aj odmocniteľ vynásobíme tým istým číslom (aj mocniteľ aj odmocniteľ vydělíme tým istým číslom)

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot c]{a^{k \cdot c}}$$

$$\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[15]{x^6}$$

$$\sqrt[35]{y^{21}} = \sqrt[5]{y^3}$$

čiasťočné odmocnenie (odmocňovanie) – rozložiť základ odmocniny tak na súčin, aby sa dala počítať odmocnina z jedného činiteľa

Samozrejme vtedy využívame túto úpravu, ak sa nedá odmocniť pôvodný základ odmocniny.

P. Ak pod odmocninou stojí celé číslo, tak činiteľ hľadáme medzi príslušnými mocninami prirodzených čísel počnúc dva:

- ak ide o druhú odmocninu, potom druhé mocniny čísel: $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; ...
- ak ide o tretiu odmocninu, potom tretie mocniny čísel: $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; ...
- ak ide o štvrtú odmocninu, potom štvrté mocniny čísel: $2^4 = 16$; $3^4 = 81$; $4^4 = 256$; $5^4 = 625$; ...

atď.

Ak pod odmocninou stojí mocnina premennej, potom ju rozložíme na súčin dvoch mocnín so spoločným základom tak, aby jeden mocniteľ bol najväčší prirodzený násobok odmocniteľa, ktorý je ešte menší ako mocniteľ:

- ak ide o druhú odmocninu, potom najväčší násobok dva menší od mocniteľa: $\sqrt{x^{19}} = \sqrt{x^{18} \cdot x^1}$
- ak ide o tretiu odmocninu, potom najväčší násobok tri menší od mocniteľa: $\sqrt[3]{x^{14}} = \sqrt[3]{x^{12} \cdot x^2}$
- ak ide o štvrtú odmocninu, potom najväčší násobok štyri menší od mocniteľa: $\sqrt[4]{x^{23}} = \sqrt[4]{x^{20} \cdot x^3}$

atď.

Ale väčšinou pod odmocninou je výraz – koeficientom a rôznymi mocninami rôznych premenných – takže treba tieto dva postupy kombinovať.

usmernenie zlomku – odstránenie odmocniny z menovateľa

V. Hodnota zlomku sa nemení, ak aj čitateľ aj menovateľ vynásobíme (rozšírenie) alebo vydělíme (zjednodušenie/krátenie) tým istým nenulovým číslom alebo výrazom.

P. Pri usmernení využívame rozšírenie zlomku. Tak násobíme, aby pod odmocninou v menovateli vznikol výraz odmocniteľný. Samozrejme odmocnina nezmizne zo zlomku – objaví sa v čitateli, ak nebola už aj pred usmernením nejaká.

Najjednoduchší prípad, ak máme v menovateli jednočlen. Potom násobíme rovnakou odmocninou takého výrazu, aby aj koeficient (ak je tam aj číslo) aj mocniny premenných (ak sú tam nejaké) sa dali odmocniť.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{7}{\sqrt[3]{x^2 \cdot y^7}} = \frac{7}{\sqrt[3]{x^2 \cdot y^7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x \cdot y^2}}{\sqrt[3]{x \cdot y^2}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{x \cdot y^2}}{\sqrt[3]{x^2 \cdot y^7 \cdot x \cdot y^2}} = \frac{7 \sqrt[3]{x \cdot y^2}}{\sqrt[3]{x^3 \cdot y^9}} = \frac{7 \sqrt[3]{x y^2}}{x y^3} \quad x, y \neq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{7xy^3}}{\sqrt[4]{9x^5 \cdot y^{15}}} &= \frac{\sqrt{7xy^3}}{\sqrt[4]{3^2 \cdot x^5 \cdot y^{15}}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^2 \cdot x^3 \cdot y}}{\sqrt[4]{3^2 \cdot x^3 \cdot y}} = \frac{\sqrt{7xy^3} \cdot \sqrt[4]{3^2 \cdot x^3 \cdot y}}{\sqrt[4]{3^2 \cdot x^5 \cdot y^{15}} \cdot \sqrt[4]{3^2 \cdot x^3 \cdot y}} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{7^2 \cdot x^2 \cdot y^6} \sqrt[4]{3^2 \cdot x^3 \cdot y}}{\sqrt[4]{3^4 \cdot x^8 \cdot y^{16}}} = \frac{\sqrt[4]{3^2 \cdot 7^2 \cdot x^5 \cdot y^7}}{3x^2 y^4} = \frac{\sqrt[4]{9 \cdot 49 \cdot x^4 \cdot x \cdot y^4 \cdot y^3}}{3x^2 y^4} = \frac{xy \sqrt[4]{441xy^3}}{3x^2 y^4} = \frac{\sqrt[4]{441xy^3}}{3xy^3} \quad x, y > 0 \end{aligned}$$

Ak je v menovateli súčet alebo rozdiel obsahujúci druhú odmocninu, potom využijeme vzťah:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x(x-y) \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} \\ &= \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x\sqrt{x} + x\sqrt{y}\end{aligned}$$

príklad:

$$\begin{array}{rcl} 5x + 7 & \geq & 0 \\ 5x & \geq & -7 \\ x & \geq & -\frac{7}{5} \end{array}$$

$$x \in \left(-\frac{7}{5}; \infty\right)$$

$4x^2 - 9 \geq 0$	$/+9$
$4x^2 \geq 9$	$/:4$
$x^2 \geq \frac{9}{4}$	$/\sqrt{\quad}$
$ x \geq \frac{3}{2}$	

$$x \in (-\infty; -1,5) \cup (1,5; \infty)$$

a, $\sqrt{960}$ b, $\sqrt{3\,456}$ c, $\sqrt{9\,072}$ d, $\sqrt[3]{9\,000}$ e, $\sqrt[3]{270\,000}$

$$\sqrt{960} = \sqrt{16 \cdot 60} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{60} = 4 \cdot \sqrt{4 \cdot 15} = 4 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{15} = 8\sqrt{15}$$

$$\sqrt{3456} = \sqrt{36 \cdot 96} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{96} = 6 \cdot \sqrt{4 \cdot 24} = 6 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{24} = 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 6} = 12 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 12 \cdot 2 \sqrt{6} = 24\sqrt{6}$$

$$\sqrt{9\,072} = \sqrt{36 \cdot 252} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{252} = 6 \cdot \sqrt{36 \cdot 7} = 6 \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{7} = 6 \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 36\sqrt{7}$$

$$\sqrt[3]{9\,000} = \sqrt[3]{1\,000 \cdot 9} = \sqrt[3]{1\,000} \cdot \sqrt[3]{9} = 10 \sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt[3]{270\,000} = \sqrt[3]{1\,000 \cdot 270} = \sqrt[3]{1\,000} \cdot \sqrt[3]{270} = 10 \cdot \sqrt[3]{27 \cdot 10} = 10 \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{10} = 10 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{10} = 30 \sqrt[3]{10}$$

a, $\sqrt[4]{5\sqrt{x^{n+1}}}$ b, $\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{x^7}:\sqrt[6]{x^{17}}$ c, $\sqrt{\frac{x^3}{y^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{y^5}{x^5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^7}{y^7}}$
d, $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[12]{3}$ e, $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[12]{128}$

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{X^{n+1}}} = \sqrt[20]{X^{n+1}} \quad x \geq 0$$

$$\sqrt[3]{x^{24}} \sqrt[4]{x^7} \cdot \sqrt[6]{x^{17}} = \sqrt[12]{(x^2)^4} \sqrt[12]{(x^7)^3} \cdot \sqrt[12]{(x^{17})^2} = \sqrt[12]{x^8 \cdot x^{21} \cdot x^{34}} = \sqrt[12]{x^{-5}} \quad x > 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^3}{y^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{y^5}{x^5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^7}{y^7}} &= \sqrt[12]{\left(\frac{x^3}{y^3}\right)^6} \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{y^5}{x^5}\right)^3} \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{x^7}{y^7}\right)^2} = \sqrt[12]{\frac{x^{18}}{y^{18}} \cdot \frac{y^{15}}{x^{15}} \cdot \frac{x^{14}}{y^{14}}} = \\ &= \sqrt[12]{\frac{x^{17}}{y^{17}}} = \sqrt[12]{\frac{x^{12}}{y^{12}} \cdot \frac{x^5}{y^5}} = \sqrt[12]{\frac{x^{12}}{y^{12}}} \cdot \sqrt[12]{\frac{x^5}{y^5}} = \frac{x}{y} \sqrt[12]{\frac{x^5}{y^5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[12]{3} &= \sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{3^4} \cdot \sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[12]{3^2} \cdot \sqrt[12]{3} = \sqrt[12]{3^{6+4+3+2+1}} = \sqrt[12]{3^{16}} = \sqrt[3]{3^4} = \\ &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \mathbf{3\sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[12]{128} = \sqrt[2]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^5} \cdot \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{(2^3)^6} \cdot \sqrt[12]{(2^4)^4} \cdot \sqrt[12]{(2^5)^3} \cdot \sqrt[12]{2^7} =$$

$$= {}^{12}\sqrt{2^{18} \cdot 2^{16} \cdot 2^{15} 2^7} = {}^{12}\sqrt{2^{56}} = {}^3\sqrt{2^{14}} = {}^3\sqrt{2^{12} \cdot 2^2} = 2^4 \cdot {}^3\sqrt{2^2} = 16^3\sqrt{4}$$

Usmernite dané zlomky:

$$a, \frac{16}{\sqrt{8}}$$

$$b, \frac{4+\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$$

$$c, \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$d, \frac{x^3}{\sqrt{x}}$$

$$e, \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\frac{16}{\sqrt{8}} = \frac{16}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{16 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{16\sqrt{8}}{\sqrt{8^2}} = \frac{16\sqrt{8}}{8} = 2\sqrt{8}$$

$$\frac{4+\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \frac{4+\sqrt{12}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(4+\sqrt{12}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{12} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{24}}{2} = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 6}}{2} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{2} = \frac{2(2\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

$$\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(3-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2}{3-2} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^3 \sqrt{x}}{x} = x^2 \sqrt{x}$$

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(a+b) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{a \cdot \sqrt{a} - a \cdot \sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a} - b \cdot \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{a \cdot \sqrt{a} - a \cdot \sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a} - b \cdot \sqrt{b}}{a-b}$$

Pre ktoré x majú zmysel výrazy:

$$a, \sqrt{2x-1},$$

$$b, \sqrt{1-3x}$$

$$c, \sqrt{-x}$$

$$d, \sqrt{x^2-1}$$

Čiastočne odmocnite:

$$a, \sqrt{50},$$

$$b, \sqrt{112},$$

$$c, {}^3\sqrt{54},$$

$$d, {}^3\sqrt{9\,000},$$

$$e, \sqrt{46\,208}$$

Upravte podľa viet o počítaní s mocninami a uveďte, kedy majú výrazy zmysel:

$$a, \sqrt{5}\sqrt{125}$$

$$b, \sqrt{72}\sqrt{2}$$

$$c, \sqrt{5}\sqrt{10}\sqrt{180}\sqrt{40}$$

$$d, {}^3\sqrt{1,6} {}^3\sqrt{8,8} {}^3\sqrt{0,66} {}^3\sqrt{25}$$

$$e, \sqrt[3]{2\frac{1}{7}} \sqrt{2,4} \sqrt{7,6}$$

$$f, {}^3\sqrt{a^{r-1}} {}^3\sqrt{a^{4-r}} {}^3\sqrt{a^{3(r-1)}}$$

$$g, \sqrt[4]{x^7} \sqrt{27x^3} \sqrt[4]{27x}$$

Upravte podľa viet o počítaní s mocninami a uveďte, kedy majú výrazy zmysel:

$$a, \sqrt{2} \cdot {}^3\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot {}^{12}\sqrt{2}$$

$$b, \sqrt{2} \cdot {}^3\sqrt{4} \cdot \sqrt[4]{8} \cdot {}^{12}\sqrt{16}$$

$$c, {}^3\sqrt{8} \cdot \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[15]{32}$$

$$d, 2\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[8]{24}$$

$$e, \sqrt[18]{x^{4n+6}} \cdot \sqrt[12]{x^{2n+3}}$$

$$f, \sqrt[15]{a^{2x+3y}} \cdot \sqrt[12]{a^{2y-3x}}$$

$$g, \sqrt[n]{a^{1-2n}} \cdot \sqrt[n+1]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}} \cdot \sqrt[n+1]{a^{1+2n}}$$

$$h, \sqrt[3]{x^{2n-5}} \cdot \sqrt[5]{x^{4n-5}}$$

Usmernite dané zlomky:

$$a, \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$b, \frac{15}{\sqrt{3}}$$

$$c, \frac{3-\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

$$d, \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$e, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-4}$$

$$f, \frac{6}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$$

$$g, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-5\sqrt{5}}$$

$$h, \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3}$$

$$i, \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$