

Képletek – kéttagú kifejezések hatványa (Vzorice – mocniny dvojčlenov)

T. Kéttagú kifejezések természetes kivevőjű hatványai (összeg és különbség) és természetes kivevőjű hatványok összege és különbsége:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

Többszorosított kifejezés szorzattá alakítása

Az előzőekben zárójeleket tüntettünk el (egytagú kifejezés szorzása többszorosított, többszorosított kifejezések szorzata, kéttagú kifejezés hatványa). Néha el kell távolítanunk a zárójeleket, hogy összevonás után egy egyszerűbb kifejezést kapjunk. Viszont vannak olyan helyzetek, mikor pontosan az ellentettjét kell csinálnunk – egy többszorosított kifejezést szorzattá alakítani.

Ha törtekifejezéseket szeretnénk összevonni, törtet egyszerűsíteni, egy magasabb fokszámú egyenletet megoldani (ez általánosan nem érvényes); szükségünk van a többszorosított szorzattá alakítására. Két módon történhet – ami tulajdonképpen három lehetőség:

- a kifejezés nem bontható szorzattá (ezen többszorosított kifejezéseket irreducibilis polinómoknak nevezzük – legfeljebb számot lehet belőlük kiemelni)
- zárójel elé történő kiemeléssel
- képlet segítségével

Ahhoz, hogy az ember egy bonyolultabb többszorosított kifejezésben (tagjai több különböző ismeretlen hatványait tartalmazzák) meglássa a fent felsorolt képletek valamelyikét, óriási tapasztalattal kell bírnia – rengeteg megoldott példa által. Bennünket ezért inkább azon példák érdekelnek, melyeket kiemeléssel (akár többszörös kiemeléssel) lehet szorzattá alakítani.

Ha egy többszorosítottból „valamit” ki lehet emelni, ez tulajdonképpen a benne szereplő tagok közös osztója – és mi közülük is a legnagyobbat keressük. A legnagyobb közös osztó keresésénél általános iskolai ismereteinkből indulunk ki. Konkrétan a számelméletből: a legnagyobb közös osztó (LKO v LnkO – GCD: „greatest common divisor”) fogalmából.

Ha az LKO-t keressük klasszikus módszerrel, akkor felsoroljuk a két szám összes osztóját, és megkeressük közöttük a legnagyobbat a közös osztókból. Létezik más módszer is (pl. euklideszi algoritmus), de ha számainkat prímtényezőző szorzatára bontjuk (prímfaktorizáció), akkor az LKO-t a prímtényezőző kisebb hatványainak szorzatai adják – amennyiben a szám felbontásában valamely prímszám nem szerepel, akkor ennek nulladik hatványa kerül a közös osztóba [hiányozni fog a szorzatból]. Több szám LKO-jának keresésénél mindig a prímek legkisebb előforduló hatványa kerül a szorzatba (beleértve a nulladik hatványt – vagyis a hiányát)

$$(4\,200, 15\,876) = ?$$

$$4\,200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$15\,876 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2$$

$$(4\,200, 15\,876) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7 = 84$$

Ezzel a módszerrel találjuk meg a tagok legnagyobb közös osztóját is – úgy az együttthatókat, mint az ismeretleneket is. A LKO a tagokban előforduló összes tényező legkisebb hatványainak szorzataként áll elő.

$$(180x^3yz^7, 1\,350y^4z^3, 120x^4y^2z^5) = ?$$

$$180x^3yz^7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot y^1 \cdot z^7$$

$$1\,350y^4z^3 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot y^4 \cdot z^3$$

$$120x^4y^2z^5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot z^5$$

$$(180x^3yz^7, 1\,350y^4z^3, 120x^4y^2z^5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y \cdot z^3 = 30yz^3$$

Ha már megtaláltuk a tagok legnagyobb közös osztóját, kiemelhetjük a zárójel elé. Ekkor a zárójelbe az egyes tagoknak a kiemelt taggal való hányadosai kerülnek.

$$180x^3yz^7 + 1\,350y^4z^3 - 120x^4y^2z^5 = 30yz^3 \cdot \left(\frac{180x^3yz^7}{30yz^3} + \frac{1\,350y^4z^3}{30yz^3} - \frac{120x^4y^2z^5}{30yz^3} \right) =$$

$$= 30yz^3(6x^3z^4 + 45y^3 - 4x^4yz^2)$$

M. Ha többtagú kifejezésünkben helyesen emeltünk ki, akkor zárójelünk pontosan annyi tagot tartalmaz, amennyiből kiemeltük a LKO-jukat.

Az itt elkövethető leggyakoribb hiba, hogy mikor a többtagból pontosan az egyik tagot kiemelve, valaki nem jegyzi fel az egyest, mint a tag hányadosát:

$$x^3 - 3x^2 + x = x \cdot (x^2 - 3x + 1) \quad \text{és nem} \quad x \cdot (x^2 - 3x)$$

M. Ha a tagok nem voltak összevonhatók a kiemelés előtt, akkor a kiemelés után sem vonhatók össze a zárójelben.

M. Elvégezhetünk egy ellenőrzést (fejben): próbáljuk visszaszorozni a kapott eredményt – ha jól dolgoztunk, visszakapjuk az eredeti többtagú kifejezést.

Néha azonban nem lehet egyszerre minden tagból kiemelni. Ekkor próbálkozhatunk kiemeléssel csoportokból – általában párban, esetleg hármasával emelhetünk ki. Ha jól emeltünk ki, akkor előttünk áll egy újabb kiemelés – zárójeleink tartalma megegyezik, vagyis kiemelhető.

$$\begin{aligned} 12x^3 - 20x^2 + 6x - 10 &= 4x^2(3x - 5) + 2(3x - 5) = (3x - 5)(4x^2 + 2) = 2(3x - 5)(2x^2 + 1) \\ 12x^3 - 20x^2 + 6x - 10 &= 6x(2x^2 + 1) - 10(2x^2 + 1) = (2x^2 + 1)(6x - 10) = 2(2x^2 + 1)(3x - 5) \end{aligned}$$

példa:

Hatványozzuk:

a, $(x + 1)^2$

b, $(2x^2 + 1)^2$

c, $\left(\frac{2}{3}x^3y - \frac{5}{2}x^2y^4\right)^2$

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(2x^2 + 1)^2 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 1^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1$$

$$\left(\frac{2}{3}x^3y - \frac{5}{2}x^2y^4\right)^2 = \left(\frac{2}{3}x^3y\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x^3y \cdot \frac{5}{2}x^2y^4 + \left(\frac{5}{2}x^2y^4\right)^2 = \frac{4}{9}x^6y^2 - \frac{10}{3}x^5y^5 + \frac{25}{4}x^4y^8$$

Hatványozzuk:

a, $(x - 3)^3$

b, $(2x + y^3)^4$

c, $\left(\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^3y^3\right)^3$

$$(x - 3)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

$$(2x + y^3)^4 = (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot y^3 + 6 \cdot (2x)^2 \cdot (y^3)^2 + 4 \cdot 2x \cdot (y^3)^3 + (y^3)^4 = 16x^4 + 32x^3y^3 + 24x^2y^6 + 8xy^9 + y^{12}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^3y^3\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2 \cdot \frac{2}{3}x^3y^3 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2y^3 \cdot \left(\frac{2}{3}x^3y^3\right)^2 - \left(\frac{2}{3}x^3y^3\right)^3 = \\ &= \frac{1}{8}x^6y^9 - \frac{1}{2}x^7y^9 + \frac{2}{3}x^8y^9 - \frac{8}{27}x^9y^9 \end{aligned}$$

Szorozzuk össze képlet alapján:

a, $(x + 5)(x - 5)$

b, $(5x^2 - y^4)(5x^2 + y^4)$

c, $\left(\frac{1}{3}xy^2 + \frac{4}{3}x^3y^4\right)\left(\frac{1}{3}xy^2 - \frac{4}{3}x^3y^4\right)$

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$$

$$(5x^2 - y^4)(5x^2 + y^4) = (5x^2)^2 - (y^4)^2 = 25x^4 - y^8$$

$$\left(\frac{1}{3}xy^2 + \frac{4}{3}x^3y^4\right)\left(\frac{1}{3}xy^2 - \frac{4}{3}x^3y^4\right) = \left(\frac{1}{3}xy^2\right)^2 - \left(\frac{4}{3}x^3y^4\right)^2 = \frac{1}{9}x^2y^4 - \frac{16}{9}x^6y^8$$

Alakítsuk szorzattá:

a, $kx + ky$

b, $x^2 - xy$

c, $8a^3b^5 - 28a^2b^3 + 20a^4b^4$

d, $xc + xd - yd - yc$

e, $ab + ac - bc - a^2$

f, $4x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 2$

$$g, x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$h, 25a^6b^4 - 49a^2b^8$$

$$i, x^2 - y^2 + 12yz - 36z^2$$

$$kx + ky = k(x + y)$$

$$x^2 - xy = x(x - y)$$

$$8a^3b^5 - 28a^2b^3 + 20a^4b^4 = 4a^2b^3(2ab^2 - 7 + 5a^2b)$$

$$xc + xd - yd - yc = x(c + d) - y(d + c) = (c + d)(x - y)$$

$$ab + ac - bc - a^2 = a(b - a) - c(-a + b) = (b - a)(a - c)$$

$$4x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 4x^4(x + 1) - 3x^2(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(4x^4 - 3x^2 - 2)$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = (x^2 - 2x)^2 \quad \text{vagy} \quad = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x - 2)^2$$

$$25a^6b^4 - 49a^2b^8 = (5a^3b^2 + 7ab^4)(5a^3b^2 - 7ab^4)$$

$$x^2 - y^2 + 12yz - 36z^2 = x^2 - (y^2 - 12yz + 36z^2) = x^2 - (y - 6z)^2 = (x + (y - 6z))(x - (y - 6z)) = (x + y - 6z)(x - y + 6z)$$

Hatványozzuk:

$$a, (a + b)^2$$

$$b, (a - b)^2$$

$$c, (x + y)^2$$

$$d, (a + 3)^2$$

$$e, (b - 2)^2$$

$$f, (3a - b)^2$$

$$g, (3y + x)^2$$

$$h, (3x - 2y)^2$$

$$i, (5a + 3b)^2$$

$$j, (a^2 + 1)^2$$

$$k, (x^3 + 1)^2$$

$$l, (x^2 + y^2)^2$$

$$m, (a^3 - b^3)^2$$

$$n, \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$o, \left(y - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$p, \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^2$$

$$q, \left(\frac{5}{6}x^3y^2 + \frac{3}{5}xy\right)^2$$

$$r, \left(\frac{2}{3}a^3b^4 - 2\frac{1}{2}a^5b\right)^2$$

$$s, \left(\frac{4}{5}a^3b^3 - 1\frac{1}{4}a^2b^3\right)^2$$

Szorozzuk össze képlet alapján:

$$a, (a + 2)(a - 2)$$

$$b, (x - 1)(x + 1)$$

$$c, (2x + y)(2x - y)$$

$$d, (2b - 3a)(2b + 3a)$$

$$e, \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)$$

$$f, \left(\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}b^2\right)$$

Alakítsuk szorzattá:

$$a, x^4 + x^3 + x + 1;$$

$$b, (x + y)^3 - (x - y)^3;$$

$$c, x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1;$$

$$d, x^3 - \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{27}xy^2 - \frac{1}{729}y^3.$$

Alakítsuk szorzattá:

$$a, 4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) - 3x^2;$$

$$b, 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27;$$

$$c, x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x.$$