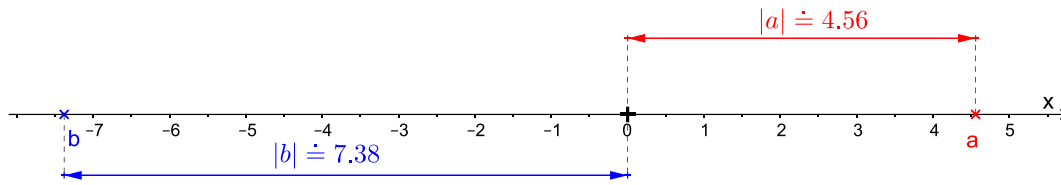


Absolútna hodnota

Na ZŠ absolútna hodnota čísla je určená, ako vzdialenosť čísla od nuly na číselnej osi. Vieme, že vzdialenosti meriame nezápornými číslami, čiže týmto spôsobom počítané absolútne hodnoty čísel vychádzajú kladné alebo nula.

Hoci táto definícia je správna, predsa na SŠ trošku inakšie zavedieme pojem absolútnej hodnoty.



D. Absolútna hodnota ľubovoľného čísla $a \in \mathbb{R}$:

$$|a| = \begin{cases} a; & \text{ak } a \geq 0 \\ -a; & \text{ak } a < 0 \end{cases}$$

pr.: $|3| = 3$; $|-7| = 7$; $|1\,322| = 1\,322$; $|-781| = 781$; $|0| = 0$

V.

- a, $|a| \geq 0$
- b, $|a| = |-a|$
- c, $a \leq |a|$
- d, $|a + b| \leq |a| + |b|$ – trojuholníková nerovnosť
- e, $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$
- f, $|a| = \sqrt{a^2}$
- g, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \Rightarrow |a^n| = |a|^n$, kde $n \in \mathbb{N}$
- h, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

Takže pre čísla určiť absolútnu hodnotu nerobí problém.

Ale ako máme postupovať, ak riešime rovnicu, nerovnicu alebo ich sústavu s absolútnou hodnotou – neznáma (výraz) je v absolútnej hodnote. Odstrániť absolútnu hodnotu sa dá jedine umocnením, ale umocnenie nie je ekvivalentnou úpravou – pribudne (pribudnú) riešenie, ktoré nie je riešením pôvodnej rovnice. To by nebol problém → skúškou vieme vylúčiť tie nesprávne riešenia (viď. v druhom ročníku iracionálne rovnice). Ale umocnením zdvojnásobíme stupeň rovnice (z lineárnej bude kvadratická; z kvadratickej rovnica štvrtého stupňa; ...) a tým dostaneme zložitejšiu rovnicu, ktorú riešiť robí väčší problém – a pri vyšších stupňoch väčšinou ani ich nedokážeme riešiť.

Výrazy, ako aj čísla, podľa znamienka môžu byť (môžu nadobudnúť hodnoty v závislosti od toho aké hodnoty premenného/premenných dosadíme) kladné, nula alebo záporné. Preto rozdelíme na dva prípady (ak obsahuje iba jednu absolútnu hodnotu):

- raz predpokladáme, že ten výraz nadobudne nezápornú hodnotu – za ten predpoklad absolútna hodnota nezáporného výrazu (podobne ako nezáporných čísel) sa rovná samotnému výrazu → absolútnu hodnotu prepíšeme na obyčajnú zátvorku
- druhá vetva vychádza z predpokladu, že výraz nadobudne zápornú hodnotu – za ten predpoklad absolútna hodnota záporného výrazu (podobne ako záporných čísel) sa rovná opačnému (-1 násobok) výrazu → absolútnu hodnotu prepíšeme na obyčajnú zátvorku a pred tú zátvorku pridáme -1-krát

Za obidva predpoklady riešime rovnicu. A na konci výsledok porovnáme s predpokladom, a ich prienik dá čiastkové riešenie. A celkové riešenie je zjednotenie tých dvoch čiastkových.

pr.

Riešme rovnicu: $|x - 1| + 2x = 14$

najprv ide predpoklad – a pod tým bude riešenie

a v druhom stĺpci druhý predpoklad a potom riešenie

$$\text{I.}$$

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$(x - 1) + 2x = 14$$

$$x - 1 + 2x = 14$$

$$3x - 1 = 14$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

$5 \geq 1$
 $\Rightarrow$ číslo 5 je riešením
 takže celkové riešenie je zjednotenie týchto: iba číslo 5

$$\text{II.}$$

$$x - 1 < 0$$

$$x < 1$$

$$-1 \cdot (x - 1) + 2x = 14$$

$$-x + 1 + 2x = 14$$

$$x + 1 = 14$$

$$x = 13$$

$13 < 1$
 $\Rightarrow$ číslo 13 nie je riešením

Ak príklad (rovnica, nerovnica, sústava rovníc, sústava nerovnic) obsahuje viac absolútnych hodnôt výrazov (v jednej z rovníc alebo nerovnic sústavy), a nie je násobkom jeden druhého [ako napríklad $|2x - 3|$ a $|12 - 8x|$], potom viac predpokladov budeme mať. Dve absolútne hodnoty delia číselnú os na tri časti. Obidva výrazy z absolútnych hodnôt menia znamienka v dvoch rôznych bodoch (číslach). Takže inakšie sa spávajú pred menšou hodnotou, inakšie medzi číslami a takisto za väčšou hodnotou. Preto riešenie sa skladá z troch čiastkových riešení.

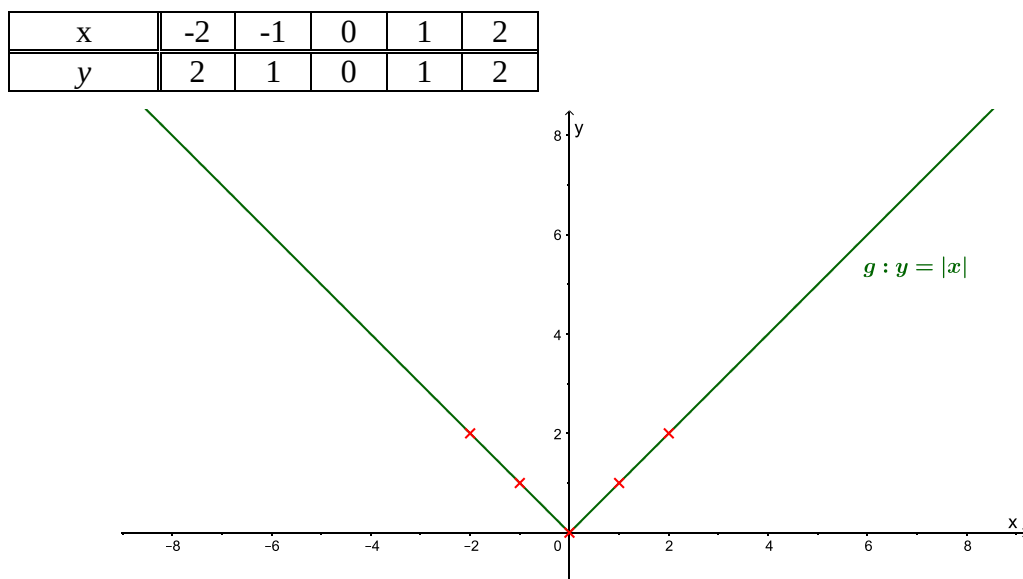
Tri absolútne hodnoty na štyri časti, štyri na päť častí, ... delia číselnú os a tým aj postup riešenia.

Absolútna hodnota takisto môže byť aj ako funkcia.

$f: y = a|x + b| + c$ $a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$
 „vrchol“ má súradnice: $V(-b; c)$

základná funkcia: $g: y = |x|$

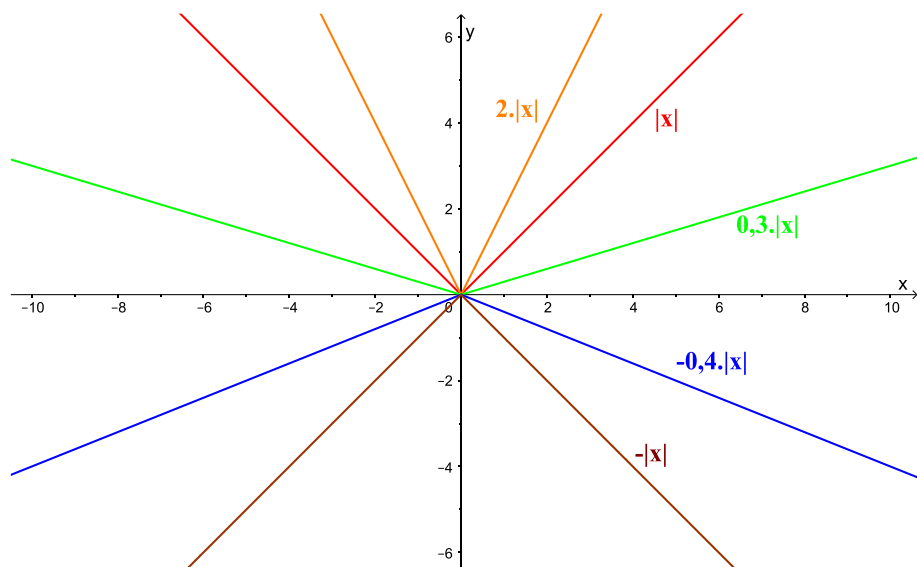
$$a = 1; b = c = 0$$



vplyv čísla a na graf

$$f: y = |x| \quad g: y = 2|x| \quad h: y = 0,3|x| \quad i: y = -0,4|x| \quad j: y = -|x|$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $	3	2	1	0	1	2	3
$2 x $	6	4	2	0	2	4	6
$0,3 x $	0,9	0,6	0,3	0	0,3	0,6	0,9
$-0,4 x $	-1,2	-0,8	-0,4	0	-0,4	-0,8	-1,2
$- x $	-3	-2	-1	0	-1	-2	-3

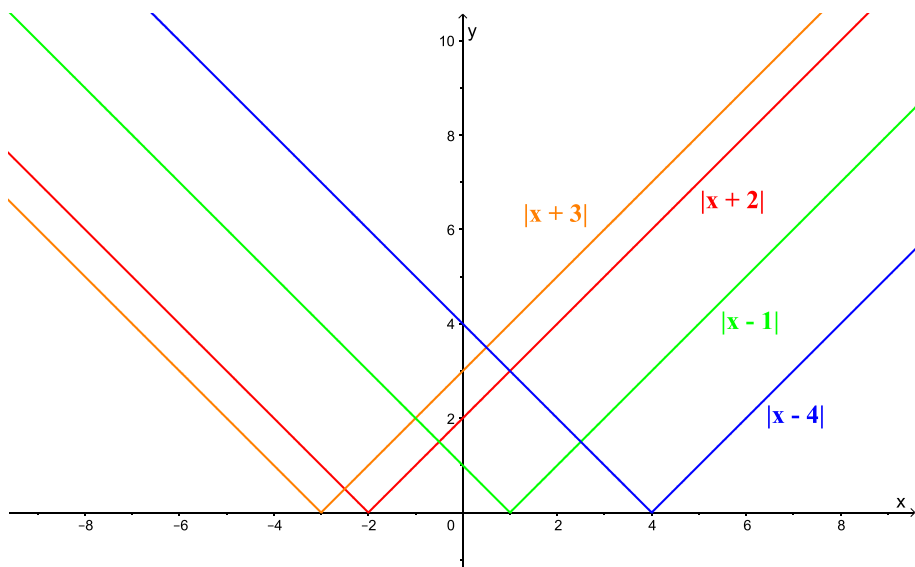


a má vplyv na **tvár a monotónnosť**

vplyv čísla ***b*** na graf

$f: y = |x + 2|$ $g: y = |x + 3|$ $h: y = |x - 1|$ $i: y = |x - 4|$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x + 2 $	1	0	1	2	3	4	5
$ x + 3 $	0	1	2	3	4	5	6
$ x - 1 $	4	3	2	1	0	1	2
$ x - 4 $	7	6	5	4	3	2	1

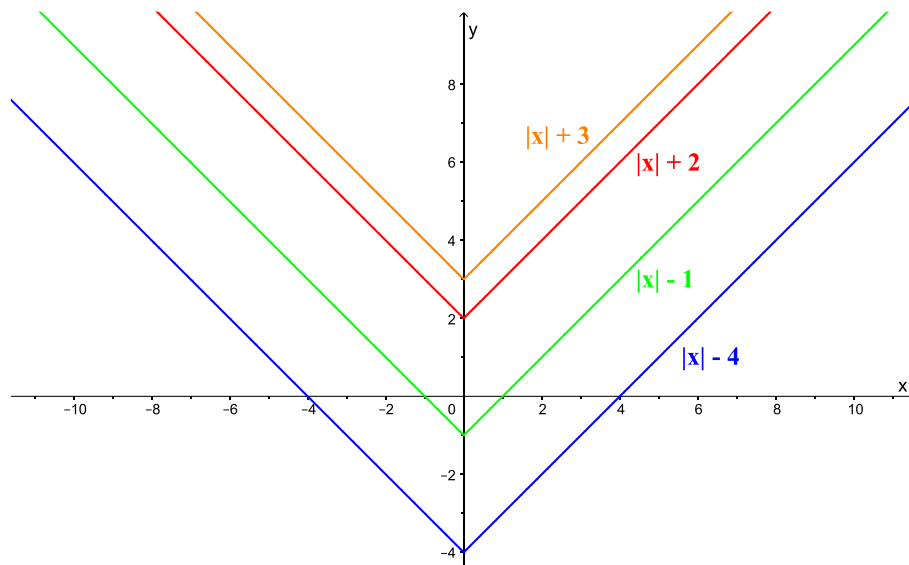


b má vplyv na **polohu** → posunie v smere x -ovej osi o ***-b***

vplyv čísla ***c*** na graf

$f: y = |x| + 2$ $g: y = |x| + 3$ $h: y = |x| - 1$ $i: y = |x| - 4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x + 2$	5	4	3	2	3	4	5
$ x + 3$	6	5	4	3	4	5	6
$ x - 1$	2	1	0	-1	0	-1	2
$ x - 4$	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1



c má vplyv na **polohu** → posunie v smere y -ovej osi o c

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$H_f = \begin{cases} \langle c; \infty \rangle, & \text{ak } a > 0 \\ (-\infty; c], & \text{ak } a < 0 \end{cases}$$

G. dve polpriamky so spoločným počiatočným bodom („vrchol“)

$$\text{M. pre } a > 0 \begin{cases} x \in (-\infty; -b) \text{ m. } \downarrow \\ x \in (-b; \infty) \text{ m. } \uparrow \end{cases}$$

$$\text{pre } a < 0 \begin{cases} x \in (-\infty; -b) \text{ m. } \uparrow \\ x \in (-b; \infty) \text{ m. } \downarrow \end{cases}$$

N.B.

$$y = a|x + b| + c$$

$$0 = a|x + b| + c$$

$$-c = a|x + b|$$

$$-\frac{c}{a} = |x + b|$$

I.

$$-\frac{c}{a} = x + b$$

$$-\frac{c}{a} - b = x_1$$

$$x_1 = \frac{-c - ab}{a}$$

/-c

/:a

II.

$$-\frac{c}{a} = -(x + b)$$

$$\frac{c}{a} = x + b$$

$$\frac{c}{a} - b = x_2$$

$$x_2 = \frac{c - ab}{a}$$

$$y = a|x + b| + c$$

$$y = a|0 + b| + c$$

$$y = a|b| + c$$

ak $a \cdot c > 0 \Rightarrow \nexists X_1; X_2$ — ak a a c majú rovnaké znamienka, potom nemá spoločný bod s osou x

ak $a \cdot c < 0 \Rightarrow \exists X_1\left(\frac{-ab - c}{a}; 0\right); X_2\left(\frac{-ab + c}{a}; 0\right)$

$Y(0; a|b| + c)$

Ext. pre $a > 0$ v bode $x_0 = -b$ má globálne minimum
pre $a < 0$ v bode $x_0 = -b$ má globálne maximum